



Editura Paralela 45

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 3022/08.01.2018.
Lucrarea este elaborată conform programei școlare în vigoare pentru bacalaureat.*

Redactare: Iuliana Ene
Corectură: autorii
Tehnoredactare: Mioara Benza
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
Bacalaureat 2025 : Matematică – M_Mate-Info : teme recapitulative,
65 de teste rezolvate, după modelul M.E., breviar teoretic /
Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa, –
Pitești : Paralela 45, 2024
ISBN 978-973-47-4144-1

I. Zanoschi, Adrian
II. Iurea, Gheorghe
III. Popa, Gabriel

51

COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ

EDITURA PARALELA 45
Bulevardul Republicii, nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918
Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492
E-mail: comenzi@edituraparelela45.ro
sau accesați www.edituraparelela45.ro

Tiparul executat la tipografia *Editurii Paralela 45*
E-mail: tipografie@edituraparelela45.ro

Copyright © Editura Paralela 45, 2024
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparelela45.ro



**Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Gabriel Popa
Petru Răducanu
Ioan Șerdean**

Bacalaureat 2025

MATEMATICĂ

M_mate-info

- _ Teme recapitulative
- _ 65 de teste rezolvate, după modelul M.E.
- _ Breviar teoretic

Editura Paralela 45



Cuvânt-înainte

Examenul de bacalaureat reprezintă pentru fiecare tânăr o placă turnantă în devenirea lui intelectuală și personală, având menirea de a certifica pregătirea științifică și competențele dobândite în liceu, dar și de a deschide un orizont profesional sau academic adecvat fiecăruia. În consecință, performanța la acest examen, și îndeosebi la disciplina matematică, presupune un efort de pregătire constant, atât pentru parcurgerea conținuturilor, cât și pentru fixare, sistematizare, recapitulare. Lucrarea de față își propune să fie un ghid eficient, cu o strategie completă, care să răspundă tuturor exigențelor disciplinei și probelor de examen.

Prima parte a lucrării conține probleme grupate pe teme, urmărind acoperirea completă a programei. Acolo unde o anumită temă nu era destul de bine reprezentată, în variantele examenelor din anii precedenți, au fost adăugate probleme clasice, pentru o mai bună aprofundare a subiectului. Astfel, un elev își poate alege singur un capitol pe care vrea să îl repete și găsește în carte un număr suficient de exerciții cu ajutorul cărora să-și atingă scopul. Problemele sunt însoțite de soluții detaliate și de comentarii metodice, unele dintre ele având chiar mai multe rezolvări.

Partea a doua cuprinde 65 de teste, însoțite de răspunsuri și de rezolvări, iar la sfârșit există un breviar teoretic, care conține principalele noțiuni prevăzute în programă.

Cartea se adresează celor care se pregătesc pentru bacalaureatul la matematică, indiferent de profilul liceului pe care îl urmează. Din acest motiv, problemele sunt structurate pe două niveluri, cele mai dificile fiind evidențiate printr-o steluță. Elevii care nu urmează profilul matematică-informatică pot parcurge doar problemele fără steluță.

Lucrarea poate fi folosită și pentru învățarea curentă, deoarece permite elevilor să se antreneze în condiții reale, de bacalaureat. Ea se poate dovedi un instrument util profesorilor și elevilor în vederea recapitulării materiei la finalul unui capitol sau la sfârșitul anului școlar.

Autorii

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.
2. Ordonați crescător numerele $a = 2,5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2,(51)$ și $d = 2,51$.
3. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}} \right) \left(\sqrt{4\frac{2}{3}} \right)^{-1}$ este natural.
4. Arătați că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{8} + \sqrt{9}}$ este natural.
5. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor a și b .
6. Determinați numerele raționale a și b , știind că $(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 = a - b\sqrt{3}$.
7. Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.
8. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
9. Stabiliți câte numere iraționale conține mulțimea $\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\}$.
10. Calculați:
 - a) $\left[\frac{5}{3} \right] + \left[-\frac{5}{2} \right]$;
 - b) $\{1,64\} - \{-2,36\}$;
 - c) $[\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{2} + \sqrt{3}]$;
 - d) $\{\sqrt{2}\} + \{\sqrt{3}\} - \{\sqrt{2} + \sqrt{3}\}$.

1.6. Trigonometrie

1. Calculați: a) $\sin \frac{5\pi}{6}$; b) $\cos \frac{7\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$; d) $\cos \frac{7\pi}{6}$.
2. Calculați: a) $\sin \left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; b) $\cos \frac{117\pi}{4}$; c) $\operatorname{tg} \frac{53\pi}{3}$; d) $\operatorname{ctg} \left(\frac{1007\pi}{6}\right)$.
3. Aflați $\cos a$, $\sin b$, $\sin(a+b)$ și $\cos(a-b)$, știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$,
 $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = \frac{12}{13}$.
4. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos a = -\frac{5}{13}$, calculați $\sin a$, $\sin 2a$ și $\cos 2a$.
5. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Se cere $\cos x$ și $\sin x$.
6. Dacă $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sin x = \frac{1}{4}$, se cere $\sin 3x$.
7. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\operatorname{ctg} x = 6$. Calculați $\sin^2 x$.
8. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 2$, calculați $\sin 2t$.
9. Fie t și $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin \alpha + t \cos \alpha = 1$.
a) Dacă $t = 1$, calculați $\operatorname{tg} 2\alpha$.
b) Dacă $t = -1$, calculați $\sin 2\alpha$.
10. Calculați $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$, știind că $\sin a = \frac{4}{5}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
11. Calculați: a) $\sin \frac{\pi}{12}$; b) $\cos 75^\circ$; c) $\operatorname{tg} 15^\circ$; d) $\cos \frac{11\pi}{12}$.
12. Calculați $\frac{\sin 75^\circ}{\sin 15^\circ} - \frac{\cos 75^\circ}{\cos 15^\circ}$.
13. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. Calculați $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)$.
14. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Arătați că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \leq 0$.
15. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a-b)$.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a) $2\sqrt{14} - \sqrt{\frac{7}{2}} - 5\sqrt{\frac{8}{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$; b) $\sqrt{3} + \sqrt{11-6\sqrt{2}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} = 3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}} + \sqrt{12+\sqrt{24}} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a = \sqrt{3-\sqrt{3}}$ și $b = \sqrt{3+\sqrt{3}}$. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \in \mathbb{Q}$.

3. Arătați că numărul $a = \sqrt{17+12\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$.

4. Calculați $[\sqrt{2} - 3\sqrt{3}]$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x).

5. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$; b) $\sqrt{6} \cdot \sqrt[3]{18} : \sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

6. a) Aduceți la forma cea mai simplă: $E(x, y) = \sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}} : \left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$, unde $x, y \in (0, +\infty)$.

b) Arătați că numărul $a = \sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{2}}} \cdot \frac{\sqrt[3]{16}}{3\sqrt[12]{3}}$ este rațional.

7. Se consideră $E(x) = x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x \geq 0$. Calculați $E(a)$, unde $a = \sqrt[11]{8}$.

8. a) Fie $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2}$ și $b = \sqrt[9]{2}$. Arătați că $a \cdot b$ este număr rațional.

b) Arătați că numărul $a = \sqrt{3+\sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt[6]{7-3\sqrt{5}} \in \mathbb{Q}$.

9. Determinați numărul natural k , dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = x$, pentru orice $x > 0$.

10. Ordonăți crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ și $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ și $\sqrt[3]{4}$.

2.5. Combinatorică

1. Care este cel mai mic număr natural n pentru care $n! > 1000$?
 2. a) Arătați că $\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.
b) Calculați suma $S = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{99}{100!}$ și arătați că $S < 1$.
 3. Calculați: a) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^9}$; b) $A_5^3 - 6C_5^3$; c) $A_4^3 - A_3^2 - C_4^2$.
 4. Calculați:
a) $\frac{n! + (n+1)!}{(n+1)! - n!}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\frac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$; c) $\frac{C_n^3}{C_n^3 + C_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
 5. Care este cel mai mare element din mulțimea $A = \{C_7^3, C_7^5, C_7^6\}$?
 6. Demonstrați că:
a) $C_{2n}^n = 2C_{2n-1}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$; b) $C_{n+1}^4 = C_n^4 + C_n^3$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.
 7. Rezolvați ecuațiile: a) $C_x^2 + A_x^2 = 30$; b) $C_{2x-3}^2 = 3$;
c) $A_x^5 - 3A_x^4 = 21A_x^3$; d) $6 \cdot C_x^1 + 6 \cdot C_{x+2}^3 = 13C_{x+1}^2$; e) $A_{x-2}^2 + C_x^2 = 41$.
 8. Rezolvați inecuațiile:
a) $C_x^{x-1} + C_{x-1}^{x-3} \leq 9$; b) $(x+1)! - x! \leq 100$; c) $C_n^3 \geq C_n^5$;
d) $C_7^k \geq C_7^{k-1}$; e) $A_{x-1}^5 \leq 12A_{x-1}^3$.
- ***
9. În câte moduri se poate forma un tren, având la dispoziție 6 vagoane?
 10. Câte numere de zece cifre distincte încep cu 20 și se termină cu 14?
 11. În câte moduri putem împărți 5 cărți la trei copii?
 12. Dăm 3 cărți diferite la 5 copii, astfel încât niciun copil să nu primească mai mult de o carte. În câte moduri se poate face împărțirea?
 13. Un antrenor are la dispoziție 10 jucători. În câte moduri poate forma o echipă formată din 6 jucători?
 14. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Determinați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
 15. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 18 fete și 12 băieți. Alcătuim o echipă formată din 6 elevi care să conțină cel puțin 4 fete. În câte moduri putem forma echipa?
 16. Aflați numărul diagonalelor unui poligon convex cu 10 laturi.

2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a**Varianta 1**

1. Arătați că modulul numărului complex $z = 5 - 12i$ este 13.
2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$ și axa Ox .
3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$.
4. Câte numere de două cifre se divid cu 4 sau cu 5?
5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin $A(1, 2)$ și este paralelă cu dreapta $d: x + y + 1 = 0$.
6. Arătați că $\sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Varianta 2

1. Arătați că partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1}{1+i}$ este $-\frac{1}{2}$.
2. Determinați punctele de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ale căror coordonate au același modul.
3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $\sqrt[3]{x+2} + 2 = 0$.
4. Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ conțin numărul 1?
5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$ sunt coliniari.
6. În triunghiul ABC avem $AB = 4, AC = 6$ și $\sphericalangle A = 120^\circ$. Arătați că $BC = 2\sqrt{19}$.

Varianta 3

1. Demonstrați că numărul $a = \sqrt{3-2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ este întreg.
2. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$ este impară.
3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$.
4. Câte submulțimi cu trei elemente are mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$?
5. Aflați distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $d: x - 2y = 0$.
6. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{5}{13}$, calculați $\operatorname{tg} a$.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2 , τ^{-2} .
2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1} , τ^{-1} și arătați că $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.
3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculați σ^{2009} .
4. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in S_3$, știind că $\sigma x \tau = e$.
5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:
 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.
 - a) Arătați că $\sigma^2 = \tau^2 = e$, $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$ și $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.
 - b) Determinați o permutare $\alpha \in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1} \neq \alpha$.
6. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.
 - a) Calculați σ^3 .
 - b) Rezolvați ecuația $\sigma^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.
7. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.
 - a) Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.
 - b) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$.
8. Determinați semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:
 $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

21. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$.

a) Arătați că $B \in C(A)$.

b) Demonstrați că dacă $X \in C(A)$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

c)* Rezolvați ecuația $X + X^2 = A$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3.3. Determinanți

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $\det(I_2 + A + A^2 + A^3)$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rezolvați ecuația $\det(A - xI_2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că $\det(X \cdot X') = (ad - bc)^2$.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\det(A) + \det(A^2) + \dots + \det(A^{2017})$.

c) Calculați $\det(A + A^2 + \dots + A^{2017})$.

5. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Arătați că, dacă $A \in G$, astfel încât $\det A = 0$, atunci $A = O_2$.

b) Demonstrați că, dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

6. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că:

$\det(A) = (a - b)(a - 1)$ și calculați $\det(A - A')$.

3.7. Șiruri

1. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ dacă:

a) $x_n = \frac{n+1}{n}$;

b) $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$;

c) $x_n = \frac{2^n}{n!}$;

d) $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

2. Studiați mărginirea șirului $(x_n)_{n \geq 1}$ al cărui termen general este:

a) $x_n = 1 + (-1)^n$;

b) $x_n = \frac{2^n + 3^n}{5^n}$;

c) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$;

d) $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

3. Arătați că următoarele șiruri sunt divergente:

a) $a_n = \frac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$;

b) $b_n = \sin \frac{n\pi}{2}$;

c) $c_n = n^2 - n$;

d) $d_n = 2^n - 3^n$.

4. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri, având termenul general:

a) $a_n = \frac{7n+3}{8n-2}$;

b) $b_n = \frac{n^2 - n + 2}{n+3}$;

c) $c_n = \frac{n^2 + 1}{(n+1)^3}$;

d) $d_n = \frac{(n-1)^2 - (n+1)^2}{2n+1}$;

e) $e_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2+2}$;

f) $f_n = \left(\frac{3n+1}{n+2}\right)^3$.

5. Calculați limita șirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situații:

a) $a_n = \frac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}$;

b) $a_n = \frac{3\sqrt{n} + 5}{2\sqrt{n} + 7}$;

c) $a_n = \frac{\sqrt{n+2}}{1 + \sqrt[3]{n+1}}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$;

e) $a_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+3}$;

f) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n\sqrt{n}$.

6. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri având termenul general:

a) $a_n = \frac{\ln n + 3}{\ln n - 2}$;

b) $b_n = \ln(n+1) - \ln n$;

c) $c_n = \frac{\ln(e^n + 1)}{n+1}$;

d) $d_n = \frac{\ln(4^n + 1)}{\ln(2^n + 3)}$;

e) $l_n = \frac{1 + \ln n^2}{2 + \ln n^3}$;

f) $f_n = n - \ln n$.

3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate, dacă:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3 - 4x$;
 - b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{e^x + 1}$.
2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -x^2 + 5, g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{4}{x^2}$. Determinați punctele de intersecție a graficelor celor două funcții și rezolvați inecuația $g(x) \leq f(x)$.
3. Reprezentați grafic funcțiile:
 - a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3 + 2x - x^2$;
 - b) $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3 - 3x + 2$.
4. Reprezentați grafic funcțiile:
 - a) $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x}$;
 - b) $g: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \{\mathbb{R}\}, g(x) = \frac{x}{x-1}$.
5. Reprezentați grafic funcțiile:
 - a) $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$;
 - b) $f: (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x\sqrt{x^2 - 1}$.
6. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)e^x$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) = m$ are două soluții reale.
7. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 - 3)e^x$. Determinați valorile reale ale lui m , știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y = m$ ($m \in \mathbb{R}$) în exact trei puncte.
8. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.
 - a) Reprezentați grafic funcția f .
 - b) Câte soluții reale are ecuația $x - 2 = m\sqrt{x^2 + 1}$, unde $m \in \mathbb{R}$?
9. Reprezentați grafic funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{\frac{2}{x}}$.
10. Reprezentați grafic funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
11. Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + m}{x^2}$, unde $m \in \mathbb{R}$.
 - a) Determinați m , astfel încât funcția să admită un extrem local în $x = 2$.

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

- Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Calculați $1001 \circ (-1001)$.
 - Rezolvați ecuația $x \circ x^2 = 64$.
 - Demonstrați că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.
- Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „ \circ ”, definită prin $x \circ y = x + y + 11$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.
 - Determinați cel mai mare număr natural n , pentru care $1 \circ 2 \circ \dots \circ n < 1000$.
- Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x * y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
 - Calculați $300 * 100$.
 - Arătați că $(x * x) * y \geq 0$, oricare ar fi numerele reale x și y .
 - Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.
- Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.
 - Calculați $(-1000) \circ (-999) \circ \dots \circ 1000$.
 - Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 12$.
- Pe mulțimea numerelor reale definim operația „ \circ ” prin $x \circ y = xy + \sqrt{2}(x+y) + 2 - \sqrt{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.
 - Demonstrați că $x \circ y = (x + \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) - \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y .

18. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

- Calculați A^2 și A^3 .
- * Determinați A^{2002} și A^{2003} .
- Demonstrați că $A^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Fie mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

- Dați un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul egal cu $\hat{0}$.

b) Arătați că există o matrice nenulă $M \in A$, astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.

c)* Rezolvați ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

20. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

- Determinați numărul de elemente din A .
- Arătați că, pentru orice $X \in A$, $X^2 = I_3$ sau $X^2 = O_3$.
- Determinați numărul matricelor X din A care au proprietatea că $X^2 = O_3$.

21. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \hat{2}y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

- * Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{Z}_5$ și $x^2 - \hat{2}y^2 = \hat{0}$, atunci $x = y = \hat{0}$.
- Dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.
- Dați exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

4.4. Polinoame

- Determinați polinomul f de gradul trei, cu coeficienți reali, pentru care $f(1+i) = -1 + 2i$ și $f(i) = 1 - i$.
- Se consideră polinomul $f = (X+1)^{10} + (X-1)^{10}$, cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{10}X^{10}$.
 - Determinați suma coeficienților polinomului f .

- b) Calculați $f(i)$ și deduceți că $a_0 + a_4 + a_8 = a_2 + a_6 + a_{10}$.
- c) Determinați coeficienții polinomului f .
- 3.** Determinați gradele polinoamelor $f + g$ și fg în fiecare dintre cazurile:
- a) $f = X^3 + X + 1, g = -X^3 - X - 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$;
- b) $f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}, g = \hat{2}X^2 + X + \hat{2}, f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$.
- 4*** Determinați polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ cu $\text{grad}(f) = 1, \text{grad}(g) = 2$, în fiecare din următoarele cazuri:
- a) $f \cdot g = X^3 - X^2 - 5X + 2$; b) $g(f(X)) = X^2$.
- 5*** Arătați că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ este element inversabil în inelul $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$ dacă și numai dacă f este constantă nenulă.
- 6.** Se consideră polinomul $f = \hat{4}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_8[X]$. Calculați f^2 și deduceți că polinomul f este element inversabil al lui $(\mathbb{Z}_8[X], +, \cdot)$.
- 7.** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g în fiecare dintre următoarele cazuri:
- a) $f = X^5 + 2X^3 - 3X + 2, g = X^2 + X + 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$;
- b) $f = 2X^4 - 2X^3 - 5X^2 - X, g = 2X^2 + 1, f, g \in \mathbb{R}[X]$;
- c) $f = X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{1}, g = \hat{3}X^2 + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;
- d) $f = X^5 - 2X^3 + X - 3, g = X^2 - 2, f, g \in \mathbb{Z}[X]$;
- e) $f = X^4 - (2 + i)X^2 + X - i, g = X + i, f, g \in \mathbb{C}[X]$;
- f) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{2}, g = X + \hat{1}, f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.
- 8.** Determinați numerele reale a și b , știind că polinomul $f = X^3 + aX + b$ dă restul 2 la împărțirea prin $X - 1$ și restul -4 la împărțirea prin $X + 1$.
- 9.** Împărțind polinomul f prin $X - 1$ obținem restul 2, iar la împărțirea prin $X + 1$ obținem restul -4 . Aflați restul împărțirii lui f prin $X^2 - 1$.
- 10.** Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{1004}$, cu forma algebrică:
 $f = a_0 + a_1X + \dots + a_{2008}X^{2008}$.
- a) Calculați $f(-1)$.
- b) Arătați că $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2008}$ este număr întreg impar.
- c) Determinați restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.
- 11.** Determinați polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ care prin împărțire la $X^2 - 3X + 1$, dă restul $2X + 1$, iar prin împărțire la $X^2 - 1$ dă restul $-2X + 2$.

4.9. Proprietăți ale integralei Riemann

1. Demonstrați că:

$$\text{a) } -1 \leq \int_0^1 \sin(x^2 + x + 1) dx \leq 1; \quad \text{b) } 1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e.$$

2. Demonstrați că:

$$\text{a) } 1 \leq \int_1^2 \sqrt{x^2 - x + 1} dx \leq \sqrt{3}; \quad \text{b) } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 - x + 1} dx \leq 1.$$

3. Fie $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. Arătați că $1 \leq \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$.

4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x} dx$. Folosind faptul că $1 \leq \ln x \leq 2$, oricare ar fi $x \in [e, e^2]$, demonstrați că $1 \leq \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} \leq 2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1}$. Arătați că, dacă $a > 0$, atunci

$$\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x) dx \leq \frac{1}{a+1}.$$

6. Fie funcția $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. Arătați că $\int_1^x f(t) dt \leq \frac{x-1}{6}$,

oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

7. a) Arătați că $2^x - x \ln 2 - 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{b) Arătați că } \int_0^1 2^{x^2} dx \geq 1 + \frac{\ln 2}{3}.$$

8. a) Arătați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

$$\text{b)* Arătați că } \frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

9*. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Stabiliți semnul funcției,

$$\text{apoi demonstrați că } \int_0^1 \cos x^2 dx \geq \frac{9}{10}.$$

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

Testul 1

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) 1. Calculați $\lceil \sqrt{2022} \rceil - 4 \cdot \left\{ -\frac{1}{4} \right\}$ ($[x]$ = partea întreagă a numărului real x , $\{x\}$ = partea fracționară a numărului real x).
- (5p) 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{1+2^x}$. Calculați $S = f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$.
- (5p) 3. Rezolvați în \mathbb{R} ecuația $2x - \sqrt{x-1} = 3$.
- (5p) 4. Determinați numărul elementelor mulțimii A , știind că are exact 11 submulțimi cu cel mult două elemente.
- (5p) 5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $3x + y - 1 = 0$. Arătați că punctele $A(2, 5)$ și $B(-4, 3)$ sunt simetrice față de dreapta d .
- (5p) 6. Arătați că $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = 2$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

- (5p) a) Verificați că $\det(A(a)) = a + 5$.
- (5p) b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, astfel încât inversa matricei $A(a)$ să fie matricea $B = \begin{pmatrix} -12 & -7 & 3 \\ -5 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- (5p) c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, știind că $X \cdot A(-4) = C$, unde C este matricea $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + \frac{z_1 + z_2}{2}$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

- (5p) a) Verificați dacă $(1 + i) * (1 - i) = 3$.
 (5p) b) Demonstrați că mulțimea $M = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$ este parte stabilă a lui \mathbb{C} față de legea „*”.
 (5p) c) Arătați că pentru o infinitate de numere complexe z , $(-2 + 3i) * z$ este număr real.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

- (5p) a) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)}$.
 (5p) b) Arătați că f are un singur punct de extrem.
 (5p) c) Demonstrați că dreapta $y = (e - 1)x$ este tangentă graficului funcției f .

2. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \frac{\ln x}{x}$.

- (5p) a) Verificați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \frac{7}{3}$.
 (5p) b) Determinați $a \in (1, \infty)$, știind că $\int_1^a (x^2 - f(x)) dx = \frac{1}{2}$.
 (5p) c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f pe $(0, 1)$ este strict monotonă.

Testul 2

Subiectul I

(30 de puncte)

- (5p) **1.** Arătați că numerele $\log_3 8, \sqrt{6}, \log_{\sqrt{2}} 3$ sunt în progresie geometrică.
 (5p) **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinați semnul produsului $P = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{5})$.
 (5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} - 2^x = \sqrt{2}(2^{x+1} - 1)$.
 (5p) **4.** Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $C_7^{x-1} \geq 2C_7^x$.
 (5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4), B(8, 1)$ și $C(0, 1)$. Arătați că punctul $H(2, 5)$ este ortocentrul triunghiului ABC .
 (5p) **6.** Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} ax - y - z = -4 \\ 2x + ay + 4z = 25, a \in \mathbb{R} \text{ și } A \text{ matricea sistemului.} \\ x + y + 3z = 18 \end{cases}$$

(5p) a) Arătați că $\det A = 3a^2 - 3a$.

(5p) b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă sistemul are soluție unică.

(5p) c) Pentru $a = 1$ determinați numărul soluțiilor (x_0, y_0, z_0) ale sistemului cu x_0, y_0, z_0 numere naturale.

2. Pe \mathbb{R} se definește legea $x * y = 2x + 2y - \frac{xy}{2} - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Arătați că $x * y = 4 - \frac{1}{2}(x-4)(y-4)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Arătați că $e = 2$ este elementul neutru al legii date.

(5p) c) Stabiliți dacă $(\mathbb{R}, *)$ are o structură de grup.

Subiectul al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 - \ln(x + 1)$.

(5p) a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

(5p) b) Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției sunt secante.

(5p) c) Arătați că graficul funcției f nu intersectează axa Ox .

2. Se consideră funcția $f: (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

(5p) a) Arătați că $\int_0^1 \frac{xe^x}{f(x)} dx = \frac{5}{6}$.

(5p) b) Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{e^x}{(x+1)^2} \right) dx$.

(5p) c) Demonstrați că $\int_1^3 f(x) dx \geq e \ln 2$.