

*Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.*

*Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programă școlară în vigoare pentru clasa a VIII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.*

**Referință științifică:** Lucrarea a fost definitivată prin contribuția și recomandările Comisiei științifice și metodice a publicațiilor Societății de Științe Matematice din România. Aceasta și-a dat avizul favorabil în ceea ce privește alcătuirea și conținutul matematic.

Redactare: Iuliana Ene  
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu  
Pregătire de tipar: Marius Badea  
Design copertă: Mirona Pintilie

#### **Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**TUDOR, ION**

**Matematică : algebră, geometrie : modalități de lucru diferențiate, pregătire suplimentară prin planuri individualizate : caiet de lucru : clasa 8 / Ion Tudor. – Ed. a 7-a. – Pitești : Paralela 45, 2023**

2 vol.

ISBN 978-973-47-3895-3

**Partea 2.** – 2023. – ISBN 978-973-47-3923-3

51

#### **COMENZI – CARTEA PRIN POȘTĂ**

EDITURA PARALELA 45

Bulevardul Republicii, Nr. 148, Clădirea C1, etaj 4, Pitești,  
jud. Argeș, cod 110177

Tel.: 0248 633 130; 0753 040 444; 0721 247 918

Tel./fax: 0248 214 533; 0248 631 439; 0248 631 492

E-mail: [comenzi@edituraparelela45.ro](mailto:comenzi@edituraparelela45.ro)

sau accesați [www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)



Tipărit la R.A. „Monitorul Oficial”

Copyright © Editura Paralela 45, 2023

Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate,  
iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.

[www.edituraparelela45.ro](http://www.edituraparelela45.ro)

Ion TUDOR

# matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

## Caiet de lucru

**Partea a II-a**

**8**

Ediția a VII-a

Editura Paralela 45

# ALGEBRĂ

## Capitolul II

### CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

#### Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice



#### Citesc și rețin

Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice se efectuează la fel ca adunarea și scăderea fracțiilor ordinare.

1.  $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \pm C(x)}{B(x)}$ ,  $B(x) \neq 0$ .

2.  $\frac{A(x)}{B(x)} \pm \frac{C(x)}{D(x)}$ ,  $B(x) \neq 0$ ,  $D(x) \neq 0$ , se efectuează astfel:

– se aduc la același numitor comun fracțiile algebrice  $\frac{A(x)}{B(x)}$  și  $\frac{C(x)}{D(x)}$ ;

– cu fracțiile aduse la același numitor comun se efectuează adunarea (scăderea) ca la punctul 1.

**Observație:** Proprietățile adunării fracțiilor ordinare se transferă și la adunarea fracțiilor algebrice.



#### Cum se aplică?

1. Calculați:

a)  $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x}$ ;

b)  $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x}$ .

**Soluție:**

a)  $\frac{x-1}{4x} + \frac{3x-5}{4x} = \frac{x-1+3x-5}{4x} = \frac{4x-6}{4x} = \frac{2(2x-3)}{4x} = \frac{2x-3}{2x}$ ;

b)  $\frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{x+2}{2x} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x(x+2)}{6x^2} = \frac{3x^2+1}{6x^2} - \frac{3x^2+6x}{6x^2} = \frac{3x^2+1-(3x^2+6x)}{6x^2} =$   
 $= \frac{3x^2+1-3x^2-6x}{6x^2} = \frac{1-6x}{6x^2}$ .



### Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Se consideră expresia  $E(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{(x-1)^3 - (x-1)} - \frac{x^2 - 3}{x^2 - 1} + \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{(x+1)^3 - (x+1)}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Arătați că  $E(x)$  nu depinde de  $x$  pentru orice  $x$  din domeniul de definiție.

17. Se consideră expresia  $E(x) = \sqrt{\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{1}{(x+1)^2}}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ . Rotunjiți la a patra zecimală numărul  $n = E(2) + E(3) + E(4) + \dots + E(11)$ .



### Ce notă merit?

### Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați:

a)  $\frac{5x^2 - x}{x - 4} - \frac{4x^2 + 3x}{x - 4}$ ;      b)  $\frac{2x + 1}{6x} + \frac{4 - x}{3x - 9}$ .

(3p) 2. Calculați  $\frac{x + 1}{2x^2 - x} - \frac{2x + 3}{4x^2 - 1} + \frac{1}{x}$ .

(3p) 3. Se consideră expresia  $E(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1} + \frac{1}{x + 1} - \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$ , unde  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .  
Aduceți expresia  $E(x)$  la forma cea mai simplă.

## Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice



### Citesc și rețin

**Înmulțirea** fracțiilor algebrice  $\frac{A(x)}{B(x)}$  și  $\frac{C(x)}{D(x)}$ ,  $B(x) \neq 0$ ,  $D(x) \neq 0$ , se efectuează

astfel:  $\frac{A(x)}{B(x)} \cdot \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x) \cdot C(x)}{B(x) \cdot D(x)}$ .

**Observație:** Proprietățile înmulțirii fracțiilor ordinare se transferă și la înmulțirea fracțiilor algebrice.



### Cum se aplică?

1. Efectuați următoarele înmulțiri:

a)  $\frac{x + 2}{3x^3} \cdot \frac{4x + 1}{x - 2x^2}$ ;      b)  $\frac{x - 1}{x + 3} \cdot \frac{x + 1}{x + 3}$ .



## Ce notă merit?

### Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) 1. Calculați:

$$\text{a) } \left( \frac{9x-7}{10x^3} + \frac{6x+2}{10x^3} \right) : \frac{1}{4x}; \quad \text{b) } \frac{2x}{5} \cdot \left( \frac{3x^2-10}{6x^2} - \frac{4x+5}{8x} \right).$$

(3p) 2. Calculați  $\frac{x+1}{x+2} \cdot \left( \frac{x-1}{x+1} - \frac{3}{x^2+2x+1} \right)$ .

(3p) 3. Se consideră expresia:

$$E(x) = \frac{1}{x} \cdot \left[ \frac{x^2-6x+8}{x^2-4x+4} - \left( \frac{1-x}{x^2-9} + \frac{x+1}{x^2+3x} \right) : \frac{x-2}{4x-12} \right], \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 0, 2, 3\}.$$

a) Aduceți expresia  $E(x)$  la forma cea mai simplă.

b) Rezolvați în  $\mathbb{R}$  inecuația  $E(x) \geq 0$ .

## Lecția 6. Ecuații de forma $ax^2 + bx + c = 0$ , $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$



### Citesc și rețin

**Definiție:** O ecuație de forma  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $x, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$  (1) se numește **ecuație de gradul II cu o necunoscută**. Numerele  $a, b$  și  $c$  se numesc **coeficienții ecuației**.

**Definiție:** Un număr  $u \in \mathbb{R}$  se numește **soluție a ecuației** (1) dacă  $au^2 + bu + c = 0$  ( $u$  verifică ecuația).

A **rezolva ecuația** (1) înseamnă a determina mulțimea de soluții:

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au^2 + bu + c = 0\}.$$

**Definiție:** Două ecuații de gradul II cu o necunoscută se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.

**Observație:** Dacă  $x_1$  și  $x_2$  sunt soluțiile reale ale ecuației de forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , atunci  $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .

### Rezolvarea ecuației (1):

#### A. Cazurile particulare

$$1. c = 0; \quad ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax + b) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ sau } x_2 = -\frac{b}{a}, \text{ deci } S = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}.$$

$$2. b = 0; \quad ax^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{c}{a} = 0.$$

Dacă  $\frac{c}{a} > 0$ , atunci  $S = \emptyset$ .

$$\text{Dacă } \frac{c}{a} \leq 0, \text{ atunci } x^2 + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right)\left(x + \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|} \text{ și } x_2 = -\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \text{ deci } S = \left\{-\sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}, \sqrt{\left|\frac{c}{a}\right|}\right\}.$$

### B. Cazul general

**Definiție:** Numărul  $\Delta = b^2 - 4ac$  se numește **discriminantul ecuației (1)**.

Pentru rezolvarea ecuației (1) în cazul general  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$  procedăm astfel:

- calculăm  $\Delta = b^2 - 4ac$ ;
- dacă  $\Delta < 0$ , atunci ecuația (1) nu are soluții în  $\mathbb{R}$ , deci  $S = \emptyset$ ;
- dacă  $\Delta = 0$ , atunci ecuația (1) are două soluții egale în  $\mathbb{R}$ :

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}, \text{ deci } S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\};$$

- dacă  $\Delta > 0$ , atunci ecuația (1) are două soluții distincte în  $\mathbb{R}$ :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ și } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ deci } S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}.$$



### Cum se aplică?

1. Rezolvați în  $\mathbb{R}$  ecuațiile:

a)  $3x^2 + 5x = 0$ ;

b)  $4x^2 - 100 = 0$ .

**Soluție:**

a)  $3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$ , deci  $x = 0$  sau  $3x + 5 = 0$ ;  $3x + 5 = 0 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow$   
 $\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$ , prin urmare  $S = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$ ;

b)  $4x^2 - 100 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$ , deci  $x - 5 = 0$   
sau  $x + 5 = 0$ ;  $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$  și  $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$ ; prin urmare,  $x \in \{-5, 5\}$ .

2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale următoarele ecuații:

a)  $x^2 + 6x + 9 = 0$ ;

b)  $(x - 1)^2 = -x(x + 5)$ .

**Soluție:**

a)  $x^2 + 6x + 9 = 0$ , deci  $a = 1$ ,  $b = 6$ ,  $c = 9$ .

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$ , prin urmare  $\Delta = 0$ .

$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$ , deci  $S = \{-3\}$ ;



# Capitolul III

## FUNȚII

### Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite



#### Citesc și rețin

**Definiție:** Fie  $A$  și  $B$  două mulțimi nevide. O lege (un procedeu)  $f$  prin care se asociază fiecărui element din  $A$  un singur element din  $B$  se numește **funcție** definită pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$ .

Notăm  $f: A \rightarrow B$  și citim „funcția  $f$  este definită pe mulțimea  $A$  cu valori în mulțimea  $B$ ”.

Mulțimea  $A$  se numește **domeniul de definiție** al funcției, mulțimea  $B$  se numește **codomeniul** sau **domeniul de valori** al funcției, iar legea (procedeul)  $f$  se numește **legea de corespondență** a funcției.

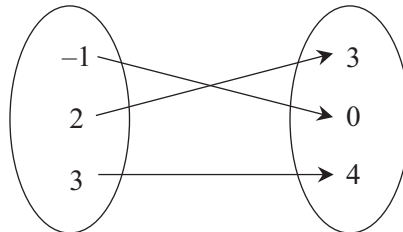
Dacă  $x \in A$ , elementul  $f(x) \in B$  se numește **imaginea lui  $x$  prin funcția  $f$**  sau **valoarea funcției  $f$  în punctul  $x$** .

#### Moduri de definire a unei funcții

O funcție poate fi definită:

##### 1. printr-o diagramă

*Exemplu:*



##### 2. printr-un tabel

*Exemplu:*

$x$	-1	2	3
$f(x)$	0	3	4

##### 3. printr-o formulă analitică

*Exemplu:*

$$f: \{-1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 3, 4\}, f(x) = x + 1$$

**Definiție:** Fie  $f: A \rightarrow B$  o funcție. Mulțimea  $\text{Im } f = \{f(x) \mid x \in A\}$  se numește **imaginea funcției  $f$**  sau **mulțimea valorilor funcției  $f$** .  $\text{Im } f \subset B$ .

**Definiție:** Fie  $f: A \rightarrow B$  o funcție. Dacă  $A \subset \mathbb{R}$  și  $B \subset \mathbb{R}$ , atunci funcția  $f$  se numește **funcție numerică**.

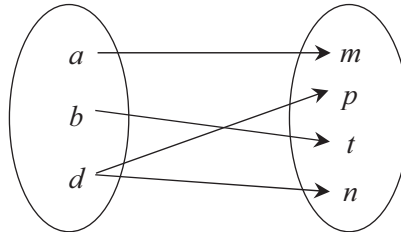
**Definiție:** Două funcții  $f: A \rightarrow B$  și  $g: C \rightarrow D$  se numesc **egale** dacă  $A = C$ ,  $B = D$  și  $f(x) = g(x)$ , oricare ar fi  $x \in A$ .

Notăm  $f = g$  și citim „funcțiile  $f$  și  $g$  sunt egale”.



### Cum se aplică?

1. Stabiliți dacă diagrama următoare definește o funcție.



**Soluție:**

Diagrama nu definește o funcție, deoarece elementul  $d$  din domeniul de definiție are două imagini,  $p$  și  $n$ .

2. Se consideră funcția  $f : \{-2, -1, 0, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2, 4\}$ ,  $f(x) = x^2$ . Determinați mulțimea  $\text{Im } f$ .

**Soluție:**

Calculăm imaginile elementelor din domeniul de definiție:  $f(-2) = 4$ ,  $f(-1) = 1$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(2) = 4$ , prin urmare  $\text{Im } f = \{0, 1, 4\}$ .

3. Se consideră funcția  $g : \{-6, -4, 0, 4, 6\} \rightarrow A$ ,  $g(x) = \frac{x}{2} + 5$ .

a) Calculați media aritmetică a numerelor  $g(-4)$  și  $g(4)$ .

b) Calculați media geometrică a numerelor  $g(-6)$  și  $g(6)$ .

**Soluție:**

$$\text{a) } g(-4) = -\frac{4}{2} + 5 = 3 \text{ și } g(4) = \frac{4}{2} + 5 = 7; m_a = \frac{g(-4) + g(4)}{2} = \frac{3 + 7}{2} = \frac{10}{2} = 5;$$

$$\text{b) } g(-6) = -\frac{6}{2} + 5 = 2 \text{ și } g(6) = \frac{6}{2} + 5 = 8; m_g = \sqrt{g(-6) \cdot g(6)} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4.$$



### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Citiți următoarele funcții:

a)  $f : E \rightarrow F, f(x) = 10x$ ;

b)  $g : \{-1, 1, 2\} \rightarrow \{1, 4\}, g(x) = x^2$ ;

c)  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = |x|$ .

2. Se consideră funcția  $f : A \rightarrow B, f(x) = 5x$ . Numiți:

a) domeniul de definiție;    b) domeniul de valori;    c) legea de corespondență.

b) Se consideră funcțiile  $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ,  $f(x) = -x$  și  $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ,  $g(x) = x^3$ . Arătați că  $f \neq g$ .

c) Se consideră funcțiile  $g: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ,  $g(x) = x$  și  $h: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ ,  $h(x) = x^7$ . Arătați că  $g = h$ .

**20.** Se consideră funcția  $f: \{-1, 0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ . Arătați că următoarele formule descriu funcția  $f$ :

a)  $f(x) = 1 - x$ ;                      b)  $f(x) = x^2$ ;                      c)  $f(x) = x^3 + 1$ .

**21.** Se consideră funcția  $g: \left\{-1, \frac{1}{7}, 1, 7\right\} \rightarrow \left\{-1, \frac{1}{7}, 1, 7\right\}$ . Stabiliți care dintre următoarele formule descriu funcția  $g$ :

a)  $g(x) = x$ ;                      b)  $g(x) = x^{-1}$ ;                      c)  $g(x) = |x|$ .

**22.** Se consideră funcția  $f: \{-5, -3, 1, 4\} \rightarrow B$ . Determinați  $\text{Im } f$ , dacă:

a)  $f(x) = |x + 1|$ ;                      b)  $f(x) = |x - 1|$ .

**23.** Se consideră funcția  $f: \left\{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right\} \rightarrow C$ . Determinați  $\text{Im } f$ , dacă:

a)  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ ;                      b)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$ .

**24.** Se consideră funcția  $r: \{24, 25, 28, 43, 59\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție restul împărțirii lui la 7. Determinați cardinalul mulțimii  $\text{Im } r$ .

**25.** Se consideră funcția  $g: \{13, 14, 15, 16, 25\} \rightarrow \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , unde legea de corespondență asociază fiecărui număr din domeniul de definiție numărul său de divizori naturali. Câte submulțimi are mulțimea  $\text{Im } g$ ?

**26.** Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + 1$ . Arătați că  $f(x)[f(x + 1) + 1] + 1 \geq 0$ .

**27.** Se consideră funcția  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $g(n) = (-1)^n \cdot n$ . Calculați suma  $S = g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(101)$ .

**28.** Se consideră funcția  $h: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $h(n) = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Calculați produsul  $P = h(1) \cdot h(2) \cdot h(3) \cdot \dots \cdot h(100)$ .

**Exerciții și probleme de dificultate avansată**

**29.** Se consideră funcția  $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $g(x) = 2x + 1$ . Arătați că  $n \in \mathbb{N}$ , dacă:

a)  $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(100)}$ ;                      b)  $n = \sqrt{g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(123)}$ .

**30.** Arătați că nu există funcții  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  care să îndeplinească condiția:

$$f(1 + x) + f(1 - x) = x.$$

## Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ , $a, b \in \mathbb{R}$ . Interpretare geometrică. Lecturi grafice



### Citesc și rețin

**Definiție:** Funcția de forma  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , se numește **funcție liniară**.

Reprezentarea grafică a funcției liniare este o dreaptă.

**Definiție:** Pentru  $a \neq 0$ , funcția liniară  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , se numește **funcție de gradul I**.

### Intersecțiile graficului funcției de gradul I cu axele de coordonate

Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$ :

$$- G_f \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right);$$

$$- G_f \cap Oy = B(0; b).$$



### Cum se aplică?

**1.** Determinați punctul de pe graficul funcției  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{4} - 1$  care are coordonatele egale.

**Soluție:**

Determinăm punctul  $M(x; f(x)) \in G_f$  cu proprietatea  $x = f(x)$ , deci  $^4)x = \frac{x}{4} - 1$  sau

$$4x = x - 4, \text{ așadar } 3x = -4, \text{ de unde obținem } x = -\frac{4}{3}, \text{ prin urmare } M\left(-\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

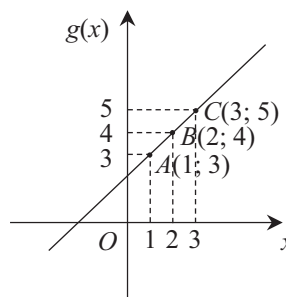
**2.** Reprezentați grafic în sistemul de axe ortogonale  $xOy$  funcția  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x + 2$ .

**Soluție:**

Scriem tabelul de valori al funcției  $g$  pentru  $x = 1, x = 2$  și  $x = 3$ .

$x$	1	2	3
$g(x)$	3	4	5

Deci, graficul funcției  $g$  conține punctele  $A(1; 3), B(2; 4)$  și  $C(3; 5)$ . Reprezentăm aceste puncte în sistemul de axe ortogonale  $xOy$  și construim graficul.





# GEOMETRIE

## Capitolul I

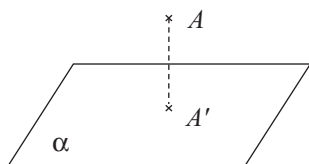
### ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

#### Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte



#### Citesc și rețin

**Definiție:** Proiecția unui punct exterior unui plan pe planul respectiv este piciorul perpendicularei construite din punctul respectiv pe acel plan.



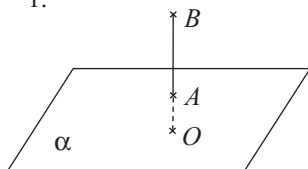
Notăm  $pr_{\alpha}A = A'$ .

**Proiecția unui segment:** Proiecția segmentului  $AB$  pe planul  $\alpha$  este segmentul  $A'B'$ , ale cărui extremități sunt proiecțiile extremităților segmentului dat pe planul  $\alpha$ .

**Observație:** Proiecția segmentului  $AB$  pe planul  $\alpha$  este:

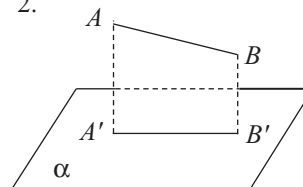
1. un punct, dacă dreapta suport a segmentului este perpendiculară pe planul  $\alpha$ ;
2. un segment, dacă dreapta suport a segmentului nu este perpendiculară pe planul  $\alpha$ .

1.



Notăm  $pr_{\alpha}AB = O$ .

2.



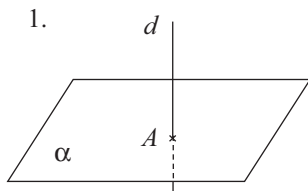
Notăm  $pr_{\alpha}AB = A'B'$ .

**Proiecția unei drepte:** Proiecția dreptei  $d$  pe planul  $\alpha$  este dreapta determinată de proiecțiile pe planul  $\alpha$  a două puncte diferite ale dreptei  $d$ .

**Observație:** Proiecția dreptei  $d$  pe planul  $\alpha$  este:

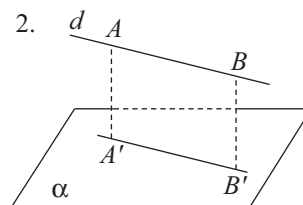
1. un punct, dacă dreapta  $d$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ ;
2. o dreaptă, dacă dreapta  $d$  nu este perpendiculară pe planul  $\alpha$ .

1.



Notăm  $pr_{\alpha}d = A$ .

2.



Notăm  $pr_{\alpha}d = A'B'$ .



### Exerciții și probleme de dificultate medie

11. Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$ . Determinați:
- a)  $\text{pr}_{(D'DB)} A'D'$ ;      b)  $\text{pr}_{(A'AC)} AB$ ;      c)  $\text{pr}_{(B'BD)} B'C$ ;      d)  $\text{pr}_{(A'AC)} AD'$ .
12. Fie  $VABCD$  o piramidă patrulateră regulată cu vârful în  $V$ , care are muchia bazei de  $4\sqrt{2}$  cm și muchia laterală de 5 cm. Calculați:
- a) lungimea proiecției segmentului  $AD$  pe planul  $(VBD)$ ;  
b) lungimea proiecției segmentului  $VB$  pe planul  $(VAC)$ .
13. Fie  $ABCD$  un tetraedru regulat cu muchia de 6 cm, în care notăm cu  $M$  mijlocul muchiei  $CD$ . Calculați:
- a) lungimea proiecției segmentului  $AB$  pe planul  $(BCD)$ ;  
b) lungimea proiecției segmentului  $AD$  pe planul  $(ABM)$ .
14. Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$  cu muchia de  $6\sqrt{2}$  cm. Aflați:
- a) lungimea proiecției segmentului  $D'B$  pe planul  $(A'AD)$ ;  
b) lungimea proiecției segmentului  $BC'$  pe planul  $(B'BD)$ .
15. În prisma patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$ , care are muchia bazei de 8 cm și înălțimea de  $2\sqrt{7}$  cm, notăm cu  $M$  mijlocul muchiei  $A'B'$ .
- a) Calculați lungimea proiecției segmentului  $AM$  pe planul  $(A'AC)$ .  
b) Calculați lungimea proiecției segmentului  $CM$  pe planul  $(B'BD)$ .

### Exerciții și probleme de dificultate avansată

16. Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$ . Dacă punctul  $B'$  se proiectează pe planul  $(A'BC')$  în centrul de greutate al triunghiului  $A'BC'$ , arătați că  $ABCD A'B'C'D'$  este cub.
17. Arătați că o piramidă patrulateră regulată are muchia bazei egală cu muchia laterală, dacă și numai dacă centrul bazei se proiectează pe planul unei fețe laterale în centrul cercului circumscris acesteia.



#### Ce notă merit?

#### Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) 1. Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$ . Determinați:
- a)  $\text{pr}_{(ABC)} D'$ ;      b)  $\text{pr}_{(B'BC)} A'$ ;      c)  $\text{pr}_{(B'BD)} C$ .
- (3p) 2. Se consideră prisma patrulateră regulată  $MNPQM'N'P'Q'$ . Determinați:
- a)  $\text{pr}_{(MNP')} PQ$ ;      b)  $\text{pr}_{(N'NP')} MP$ ;      c)  $\text{pr}_{(N'NQ')} MQ'$ .
- (3p) 3. În piramida triunghiulară regulată  $VABC$ , cu vârful în  $V$ , construim înălțimea  $VO$ ,  $O \in (ABC)$ . Știind că piramida are muchia bazei de  $4\sqrt{2}$  cm și muchia laterală de 6 cm, calculați lungimea proiecției muchiei  $VB$  pe planul  $(VAO)$ .

## Lecția 5. Plane perpendiculare



### Citesc și rețin

**Definiție:** Planele  $\alpha$  și  $\beta$  se numesc **perpendiculare** dacă măsura unghiului dintre ele este egală cu  $90^\circ$ .

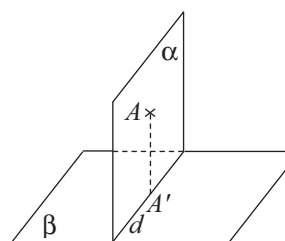
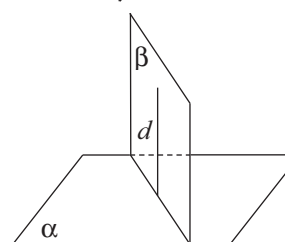
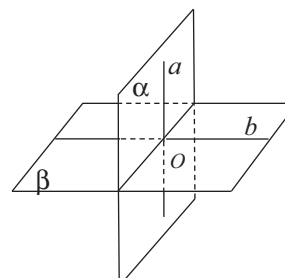
Notăm  $\alpha \perp \beta$ .

**Teoremă:** Dacă dreapta  $d$  este perpendiculară pe planul  $\alpha$ , atunci orice plan  $\beta$  care conține dreapta  $d$  este perpendicular pe  $\alpha$ .

$$\left. \begin{array}{l} d \perp \alpha \\ d \subset \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \beta \perp \alpha$$

**Teoremă:** Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci proiecția pe unul dintre plane a oricărui punct din celălalt plan aparține dreptei de intersecție a planelor.

$$\left. \begin{array}{l} d \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = d \\ A \in \alpha \\ AA' \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow A' \in d$$



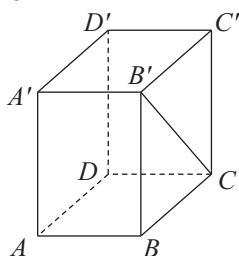
### Cum se aplică?

1. Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$ . Arătați că:

a)  $(ADD') \perp (CDD')$ ;

b)  $(A'B'C) \perp (B'BC)$ .

**Soluție:**

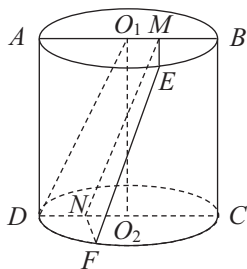


a)  $(ADD') \cap (CDD') = DD'$ ,  $AD \subset (ADD')$ ,  $AD \perp DD'$ ,  $CD \subset (CDD')$ ,  $CD \perp DD'$ , deci  $\sphericalangle((ADD'), (CDD')) = \sphericalangle ADC = 90^\circ$ , prin urmare  $(ADD') \perp (CDD')$ ;

b) Deoarece  $A'B' \subset (A'B'C)$  și  $A'B' \perp (B'BC)$ , rezultă că  $(A'B'C) \perp (B'BC)$ .

2. Dreptunghiul  $ABCD$  este secțiunea axială a unui cilindru circular drept cu  $R = 6$  cm și  $G = 8$  cm. Se consideră punctele  $E$  și  $F$  pe cercurile de diametre  $AB$ , respectiv  $CD$ , astfel încât  $\widehat{AB} = 3 \cdot \widehat{EB}$  și  $\widehat{CD} = 3 \cdot \widehat{FD}$ . Calculați lungimea proiecției segmentului  $EF$  pe planul  $(ABC)$ .

**Soluție:**



Construim înălțimea  $O_1O_2$  a cilindrului circular drept și notăm cu  $M$  și  $N$  proiecțiile punctelor  $E$ , respectiv  $F$  pe planul  $(ABC)$  și, deoarece planul  $(ABC)$  este perpendicular pe planele bazelor, rezultă că  $M \in AB$  și  $N \in CD$ .  $\widehat{AB} = 3 \cdot \widehat{EB}$ , deci  $3 \cdot \widehat{EB} = 180^\circ$ , de unde obținem  $\widehat{EB} = 60^\circ$ , prin urmare  $\triangle O_1EB$  este echilateral, așadar  $O_1M = \frac{R}{2} = 3$  cm.

Analog, se arată că  $O_2N = 3$  cm. Deoarece  $O_1M \equiv DN$  și  $O_1M \parallel DN$ , rezultă că  $O_1MND$  este paralelogram, deci  $MN \equiv O_1D$ . În  $\triangle O_1O_2D$  cu  $\sphericalangle O_2 = 90^\circ$ , aplicând teorema lui Pitagora rezultă că  $O_1D^2 = O_1O_2^2 + DO_2^2$  și obținem  $O_1D = 10$  cm, deci  $MN = 10$  cm.

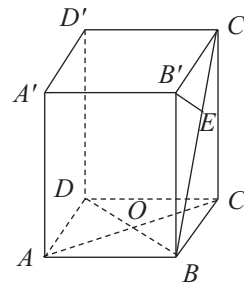
3. Se consideră prisma patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$ , care are muchia bazei de  $4\sqrt{2}$  cm și muchia laterală de  $4\sqrt{6}$  cm. Calculați:

- a)  $d[A, (B'BD)]$ ;                      b)  $d[B', (ABC')]$ .

**Soluție:**

a)  $AC \cap BD = \{O\}$ .  $B'B \perp (ABC)$  și  $B'B \subset (B'BD)$ , deci  $(B'BD) \perp (ABC)$ , prin urmare  $d[A, (B'BD)] = AO = 4$  cm;

b)  $AB \perp (B'BC)$  și  $AB \subset (ABC')$ , deci  $(ABC') \perp (B'BC)$ . Construim  $B'E \perp (ABC')$ ,  $E \in BC'$  și în  $\triangle BB'C'$  avem  $B'E = \frac{B'C' \cdot B'B}{BC'}$ . În  $\triangle BCC'$ , cu  $\sphericalangle C = 90^\circ$ , aplicând teorema lui



Pitagora obținem  $BC' = 8\sqrt{2}$  cm, prin urmare  $B'E = \frac{4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{6}}{8\sqrt{2}}$  cm, deci  $B'E = 2\sqrt{6}$  cm.



**Știu să rezolv**

**Exerciții și probleme de dificultate minimă**

1. Citiți următoarele notații:

- a)  $(ABC) \perp (DEF)$ ;                      b)  $\alpha \perp \theta$ ;                      c)  $(MNP) \perp (MNQ)$ .

2. Încercuiți litera corespunzătoare singurului răspuns corect. Planele  $\alpha$  și  $\beta$  sunt perpendiculare dacă:

- A.  $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 30^\circ$ ;                      B.  $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 45^\circ$ ;  
C.  $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 60^\circ$ ;                      D.  $\sphericalangle(\alpha, \beta) = 90^\circ$ .



## Teste de evaluare sumativă

### Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (1p) 1. Se consideră piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful în  $V$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
a)  $\text{pr}_{(ABC)} V = O$ ; b)  $\text{pr}_{(VBD)} BC = BO$ .
- (1p) 2. Se consideră paralelipipedul dreptunghic  $MNPQM'N'P'Q'$ . Aflați măsurile unghiurilor:  
a)  $\sphericalangle((NPP'), (QPP'))$ ; b)  $\sphericalangle((NMM'), (QMM'))$ .
- (1p) 3. Triunghiul dreptunghic  $VAB$  este secțiunea axială a unui con circular drept cu vârful în  $V$ . Aflați măsura unghiului dintre generatoarea  $VA$  și planul bazei.
- (1p) 4. Prisma patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$ , are muchia bazei de 6 cm și înălțimea de  $3\sqrt{5}$  cm. Calculați  $d[(C', (B'CD))]$ .
- (2p) 5. În prisma triunghiulară regulată  $DEFD'E'F'$ , cu muchia bazei de  $4\sqrt{2}$  cm și înălțimea de  $6\sqrt{2}$  cm, notăm cu  $M$  și  $N$  mijloacele muchiilor  $EF$ , respectiv  $DE'$ .  
a) Aflați  $\sphericalangle((D'F'F'), (NF'F'))$ . b) Calculați  $\mathcal{A}_{DE'M}$ .
- (3p) 6. În cubul  $ABCD A'B'C'D'$  cu muchia de  $4\sqrt{2}$  cm notăm cu  $M$  mijlocul muchiei  $A'D'$ . Aflați:  
a)  $\sphericalangle((A'C'C'), (D'C'C'))$ ; b)  $d(M, AC)$ ; c)  $\sphericalangle(B'C, (B'BD))$ .

### Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (1p) 1. Se consideră prisma triunghiulară regulată  $DEFD'E'F'$ . Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:  
a)  $\text{pr}_{(DEF)} D' = E$ ; b)  $\text{pr}_{(DEF)} E'F = EF$ .
- (1p) 2. Se consideră cubul  $ABCD A'B'C'D'$ . Aflați măsurile unghiurilor:  
a)  $\sphericalangle(B'C, (A'B'C'))$ ; b)  $\sphericalangle((A'AB), (BAD))$ .
- (1p) 3. Piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful în  $V$  are muchia bazei de  $4\sqrt{6}$  cm. Știind că  $\sphericalangle(VA, (ABC)) = 30^\circ$ , calculați înălțimea piramidei.
- (1p) 4. Calculați lungimea diagonalei paralelipipedului dreptunghic  $ABCD A'B'C'D'$ , știind că  $AA' = 6$  cm,  $d(B', AD) = 3\sqrt{5}$  cm și  $d(B', CD) = 2\sqrt{10}$  cm.
- (2p) 5. Prisma patrulateră regulată  $MNPQM'N'P'Q'$  are muchia bazei de  $3\sqrt{2}$  cm și  $\sphericalangle(N'Q, (MNP)) = 45^\circ$ .  
a) Calculați  $d[M', (Q'MN)]$ ; b) Aflați  $\sphericalangle(N'Q, (N'NP))$ .
- (3p) 6. În prisma triunghiulară regulată  $ABCA'B'C'$ , cu muchia de  $2\sqrt{3}$  cm și înălțimea de 6 cm, notăm cu  $M$  mijlocul muchiei laterale  $AA'$ . Aflați:  
a)  $\sphericalangle(BC', (A'B'C'))$ ; b)  $\mathcal{A}_{BMC'}$ ; c)  $\sphericalangle((BMC'), (ABC))$ .

# Capitolul II

## ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

### II.1. POLIEDRE

**Definiție:** Un corp geometric care este mărginit numai de fețe plane se numește **poliedru**.

**Definiții:**

**Aria laterală** a unui poliedru, notată  $\mathcal{A}_l$ , reprezintă suma ariilor fețelor laterale ale poliedrului.

**Aria totală** a unui poliedru, notată  $\mathcal{A}_t$ , reprezintă suma dintre aria laterală a poliedrului și aria bazei (bazelor).

**Volumul** unui poliedru, notat  $\mathcal{V}$ , reprezintă spațiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

#### Lecția 6. Prisma regulată



#### Citesc și rețin

**Notații utilizate:**  $h$  – lungimea înălțimii prismei,  $\mathcal{P}_b$  – perimetrul bazei,  $\mathcal{A}_b$  – aria bazei,  $\mathcal{A}_l$  – aria laterală a prismei,  $\mathcal{A}_t$  – aria totală a prismei,  $\mathcal{V}$  – volumul prismei.

$$\mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h,$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b,$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h.$$



#### Cum se aplică?

**1.** Se consideră prisma triunghiulară regulată  $DEFD'E'F'$ , care are muchia bazei de 4 cm și aria laterală egală cu  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>. Calculați:

a)  $h$ ;

b)  $\mathcal{A}_t$ ;

c)  $\mathcal{V}$ .

**Soluție:**

a)  $\mathcal{A}_l = 48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, deci  $\mathcal{P}_b \cdot h = 48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> sau  $12 \cdot h$  cm =  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, de unde rezultă că  $h = \frac{48\sqrt{3}}{12}$  cm și obținem  $h = 4\sqrt{3}$  cm;

b)  $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> +  $2 \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$  cm<sup>2</sup> =  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> +  $\frac{16\sqrt{3}}{2}$  cm<sup>2</sup> =  $48\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> +  $8\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> =  $56\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>;

c)  $\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{16\sqrt{3}}{4} \cdot 4\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup> =  $4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup> = 48 cm<sup>3</sup>.

**2.** În prisma triunghiulară regulată  $ABCA'B'C'$ , care are muchia bazei de  $2\sqrt{2}$  cm și muchia laterală de  $2\sqrt{6}$  cm, notăm cu  $M$  mijlocul muchiei  $BC$ . Aflați:

a)  $\mathcal{A}_l$ ;

b)  $\mathcal{V}$ ;

c)  $\sphericalangle(A'B, (ABC))$ ;

d)  $\mathcal{A}_{C'MA}$ .

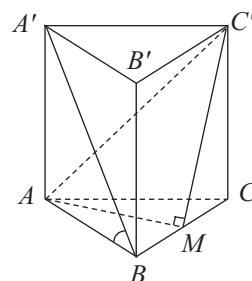
**Soluție:**

$$a) \mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 3l \cdot h = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 12\sqrt{12} \text{ cm}^2 = 12\sqrt{2^2 \cdot 3} \text{ cm}^2 = 24\sqrt{3} \text{ cm}^2;$$

$$b) \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} \cdot h = \frac{(2\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2\sqrt{6} \text{ cm}^3 = \frac{(8\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{6})}{4} \text{ cm}^3 = 12\sqrt{2} \text{ cm}^3;$$

$$c) \sphericalangle(A'B, (ABC)) = \sphericalangle A'BA. \text{ În } \triangle A'BA \text{ cu } \sphericalangle A = 90^\circ, \text{ tg}(\sphericalangle B) = \frac{A'A}{AB} = \frac{2\sqrt{6} \text{ cm}}{2\sqrt{2} \text{ cm}} = \sqrt{3}, \text{ deci } \sphericalangle A'BA = 60^\circ;$$

d) Arătăm că  $\triangle C'MA$  este dreptunghic, aplicând teorema celor 3 perpendiculare:  $C'C \perp (ABC)$ ,  $CB \subset (ABC)$ ,  $AM \subset (ABC)$  și  $AM \perp BC$ , deci  $C'M \perp AM$ , prin urmare  $\mathcal{A}_{C'MA} = \frac{C'M \cdot AM}{2}$ . Din  $\triangle C'CM$  cu  $\sphericalangle C = 90^\circ$ , aplicând teorema lui Pitagora, rezultă că  $C'M^2 = C'C^2 + CM^2$ , deci  $C'M^2 = (2\sqrt{6})^2 + \sqrt{2}^2$ , așadar  $C'M^2 = 26 \text{ cm}$  și obținem  $C'M = \sqrt{26} \text{ cm}$ .  $AM = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm} = \sqrt{6} \text{ cm}$ , prin urmare  $\mathcal{A}_{C'MA} = \frac{\sqrt{26} \cdot \sqrt{6}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{\sqrt{2^2 \cdot 39}}{2} \text{ cm}^2 = \frac{2\sqrt{39}}{2} \text{ cm}^2 = \sqrt{39} \text{ cm}^2$ .



**3.** Se consideră prisma patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$ , cu muchia bazei de  $3\sqrt{3} \text{ cm}$  și înălțimea de  $3\sqrt{6} \text{ cm}$ . Calculați:

- a)  $\mathcal{A}_l$ ;      b)  $\mathcal{V}$ ;      c) măsura  $\sphericalangle(BD', (A'AD))$ ;      d)  $d(C, BD')$ .

**Soluție:**

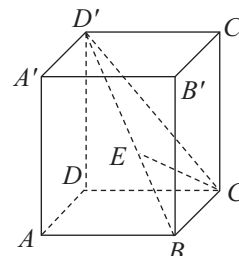
$$a) \mathcal{A}_l = \mathcal{P}_b \cdot h = 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{6} \text{ cm}^2 = 36\sqrt{18} \text{ cm}^2 = 108\sqrt{2} \text{ cm}^2;$$

$$b) \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = l^2 \cdot h = 27 \cdot 3\sqrt{6} \text{ cm}^3 = 81\sqrt{6} \text{ cm}^3;$$

$$c) \text{ Deoarece } BA \perp (A'AD), \text{ rezultă că } \sphericalangle(BD', (A'AD)) = \sphericalangle AD'B. \text{ În } \triangle AD'B \text{ cu } \sphericalangle A = 90^\circ, \text{ tg}(\sphericalangle D') = \frac{AB}{D'A} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ prin}$$

urmare  $\sphericalangle AD'B = 30^\circ$ ;

d) Construim  $CE \perp BD'$ ,  $E \in BD'$ . Aplicând teorema lui Pitagora în  $\triangle CC'D'$  cu  $\sphericalangle C' = 90^\circ$ , rezultă că  $D'C^2 = C'C^2 + C'D'^2$ , deci  $D'C^2 = (3\sqrt{6})^2 + (3\sqrt{3})^2$  sau  $D'C^2 = 54 + 27$ , așadar  $D'C^2 = 81$ , prin urmare  $D'C = \sqrt{81} \text{ cm}$  și obținem  $CD' = 9 \text{ cm}$ . Analog, din  $\triangle BCD'$  cu  $\sphericalangle C = 90^\circ$ , cu teorema lui Pitagora rezultă că  $D'B^2 = D'C^2 + BC^2$ , deci  $D'B^2 = 9^2 + (3\sqrt{3})^2$  sau  $D'B^2 = 81 + 27$ , așadar  $D'B^2 = 108$ , prin urmare  $D'B = \sqrt{108} \text{ cm}$  și obținem  $BD' = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ . În  $\triangle BCD'$  avem  $CE = \frac{CB \cdot CD'}{BD'} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 9}{6\sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{27\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{9}{2} \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$ .





## Știu să rezolv

### Exerciții și probleme de dificultate minimă

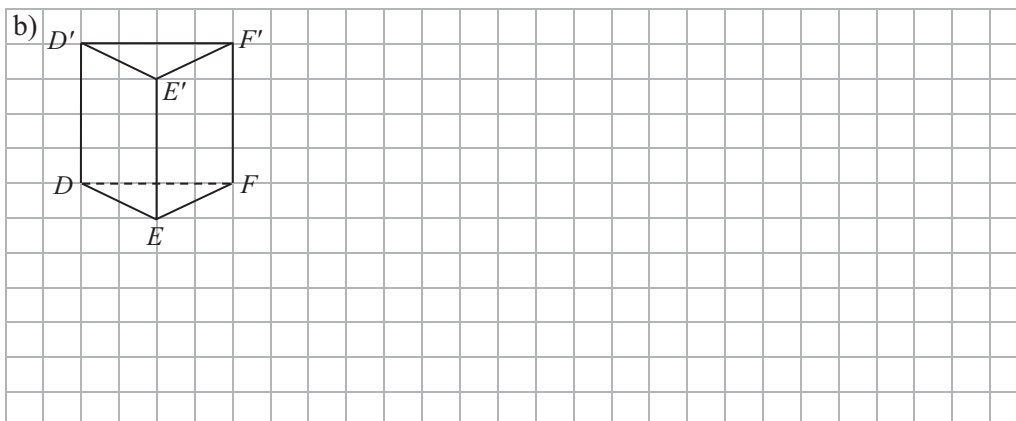
1. Se consideră prisma triunghiulară regulată  $ABCA'B'C'$ . Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

- Dacă  $l = 4$  cm și  $h = 3\sqrt{3}$  cm, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $\mathcal{A}_l$ ,  $\mathcal{A}_b$ ,  $\mathcal{A}_l$  și  $\mathcal{V}$ .
- Dacă  $l = 2\sqrt{3}$  cm și  $h = 7$  cm, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $\mathcal{A}_l$ ,  $\mathcal{A}_b$ ,  $\mathcal{A}_l$  și  $\mathcal{V}$ .
- Dacă  $l = 6$  cm și  $\mathcal{A}_l = 90$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $h$ ,  $\mathcal{A}_b$  și  $\mathcal{V}$ .
- Dacă  $h = 8$  cm și  $\mathcal{A}_l = 48$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $l$ ,  $\mathcal{A}_b$  și  $\mathcal{V}$ .



2. Se consideră prisma triunghiulară regulată  $DEFD'E'F'$ . Utilizând notațiile specifice prismei regulate, rezolvați următoarele probleme.

- Dacă  $l = 2$  cm și  $\mathcal{V} = 10\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $h$ ,  $\mathcal{P}_b$  și  $\mathcal{A}_l$ .
- Dacă  $h = 8$  cm și  $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $l$ ,  $\mathcal{P}_b$  și  $\mathcal{A}_l$ .
- Dacă  $\mathcal{A}_l = 54\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> și  $\mathcal{A}_l = 60\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $l$ ,  $\mathcal{P}_b$ ,  $h$  și  $\mathcal{V}$ .
- Dacă  $\mathcal{A}_l = 72\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> și  $\mathcal{A}_l = 90\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $l$ ,  $\mathcal{P}_b$ ,  $h$  și  $\mathcal{V}$ .





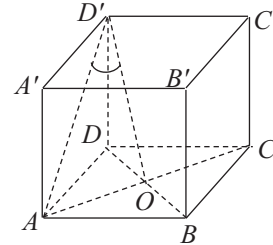
3. Se consideră cubul  $ABCD A' B' C' D'$ , care are aria totală egală cu  $144 \text{ cm}^2$ . Determinați:  
 a)  $l$ ;                      b)  $\mathcal{V}$ ;                      c)  $\sphericalangle(D'A, (D'DB))$ ;                      d)  $d(C, BD')$ .

**Soluție:**

a)  $\mathcal{A}_t = 144 \text{ cm}^2$  sau  $6l^2 = 144 \text{ cm}^2$ , deci  $l^2 = 24 \text{ cm}^2$ ,  
 așadar  $l = \sqrt{24} \text{ cm}$  și obținem  $l = 2\sqrt{6} \text{ cm}$ ;

b)  $\mathcal{V} = l^3 = (2\sqrt{6})^3 \text{ cm}^3 = 48\sqrt{6} \text{ cm}^3$ ;

c)  $AC \cap BD = \{O\}$ . Deoarece  $\text{pr}_{(D'DB)} A = O$ , rezultă că  
 $\text{pr}_{(D'DB)} D'A = D'O$ , prin urmare  $\sphericalangle(D'A, (D'DB)) = \sphericalangle AD'O$ .



În  $\triangle D'AO$  cu  $\sphericalangle O = 90^\circ$ ,  $\sin \sphericalangle D' = \frac{AO}{D'A} = \frac{1}{2}$ , prin urmare  $\sphericalangle AD'O = 30^\circ$ ;

d) Construim  $CE \perp BD'$ ,  $E \in BD'$ . În  $\triangle BCD'$  cu  $\sphericalangle C = 90^\circ$ ,  $CE$  este înălțime, deci  
 $CE = \frac{CB \cdot CD'}{BD'} = \frac{2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3}}{6\sqrt{2}} \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ .



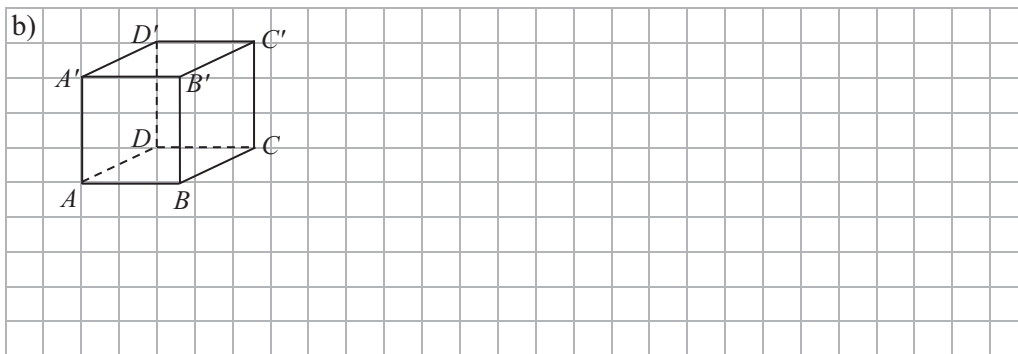
### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

1. Se consideră un cub. Calculați  $d$ ,  $\mathcal{A}_t$  și  $\mathcal{V}$ , în următoarele cazuri:

a)  $l = 3 \text{ cm}$ ;

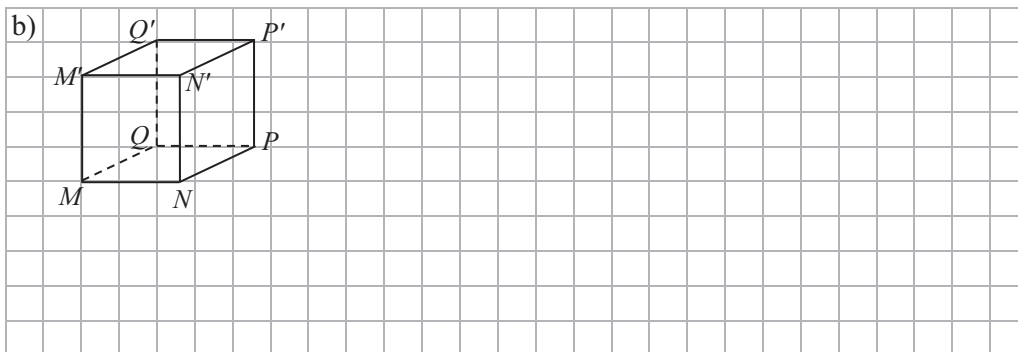
b)  $l = 4 \text{ cm}$ .



2. Se consideră un cub. Calculați  $l$ ,  $\mathcal{A}_t$  și  $\mathcal{V}$ , știind că:

a)  $d = 5\sqrt{3} \text{ cm}$ ;

b)  $d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ .





unde rezultă că  $a_p = \sqrt{15}$  cm. Construim apotema  $VM$  a piramidei,  $M \in BC$ . În  $\triangle VMB$  cu  $\sphericalangle M = 90^\circ$  aplicăm teorema lui Pitagora:  $m^2 = a_p^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$ , deci  $m^2 = \sqrt{15}^2 + 3^2$  sau  $m^2 = 24$ , prin urmare  $m = \sqrt{24}$  cm și obținem  $m = 2\sqrt{6}$  cm.  $\mathcal{P}_f = 2m + l = 4\sqrt{6}$  cm + 6 cm =  $2(3 + 2\sqrt{6})$  cm;

c)  $l = R\sqrt{3}$ , deci  $6 = R\sqrt{3}$ , de unde obținem  $R = 2\sqrt{3}$  cm. În  $\triangle VOA$  cu  $\sphericalangle O = 90^\circ$  aplicăm teorema lui Pitagora:  $m^2 = R^2 + h^2$ , deci  $(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + h^2$ , așadar  $24 = 12 + h^2$ , de unde rezultă că  $h^2 = 12$ , prin urmare  $h = \sqrt{12}$  cm și obținem  $h = 2\sqrt{3}$  cm.  
 $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3 = 18 \text{ cm}^3$ ;

d) Observăm că  $\text{pr}_{(ABC)}VA = AO$ , deci  $\sphericalangle(VA, (ABC)) = \sphericalangle VAO$ . În  $\triangle VAO$  cu  $\sphericalangle O = 90^\circ$ ,  
 $\sin \sphericalangle A = \frac{VO}{VA} = \frac{2\sqrt{3} \text{ cm}}{2\sqrt{6} \text{ cm}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \stackrel{(\sqrt{2})}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , deci  $\sphericalangle VAO = 45^\circ$ .

3. În piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful în  $V$ , care are muchia bazei de  $2\sqrt{3}$  cm și înălțimea de  $\sqrt{6}$  cm, notăm cu  $M$  mijlocul muchiei  $AD$ . Calculați:

- a)  $\mathcal{V}$ ;                      b)  $\mathcal{A}_l$ ;                      c)  $\sphericalangle(AD, VB)$ ;                      d)  $d[M, (VBC)]$ .

**Soluție:**

a)  $\mathcal{V} = \frac{\mathcal{A}_b \cdot h}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{(2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3 = \frac{12\sqrt{6}}{3} \text{ cm}^3 = 4\sqrt{6} \text{ cm}^3$ ;

b)  $AC \cap BD = \{O\}$ . Construim apotema  $VN$ ,  $N \in BC$ . În  $\triangle VON$  cu  $\sphericalangle O = 90^\circ$  aplicăm teorema lui Pitagora:

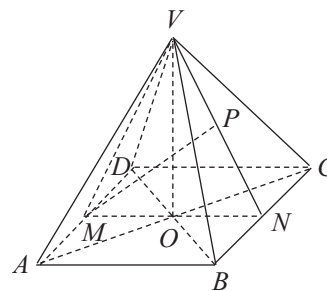
$a_p^2 = h^2 + a_b^2$ , deci  $a_p^2 = \sqrt{6}^2 + \sqrt{3}^2$ , așadar  $a_p^2 = 9$ , prin

urmare  $a_p = \sqrt{9}$  cm și obținem  $a_p = 3$  cm.  $\mathcal{A}_l = \frac{\mathcal{P}_b \cdot a_p}{2} =$

$= \frac{8\sqrt{3} \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ;

c) Deoarece  $AD \parallel BC$ , rezultă că  $\sphericalangle(AD, VB) = \sphericalangle(BC, VB) = \sphericalangle VBC$ . În  $\triangle VBN$  cu  $\sphericalangle N = 90^\circ$ ,  $\text{tg}(\sphericalangle B) = \frac{VN}{BN} = \frac{3 \text{ cm}}{\sqrt{3} \text{ cm}} = \sqrt{3}$ , prin urmare  $\sphericalangle VBC = 60^\circ$ ;

d) Construim  $MP \perp (VBC)$ ,  $P \in VN$ , deoarece  $(VMN) \perp (VBC)$ ;  $\mathcal{A}_{VMN} = \frac{MP \cdot VN}{2}$  sau  
 $\frac{MP \cdot VN}{2} = \frac{MN \cdot VO}{2}$ , deci  $MP \cdot 3 \text{ cm} = 6\sqrt{2} \text{ cm}^2$ , de unde rezultă că  $MP = 2\sqrt{2}$  cm.



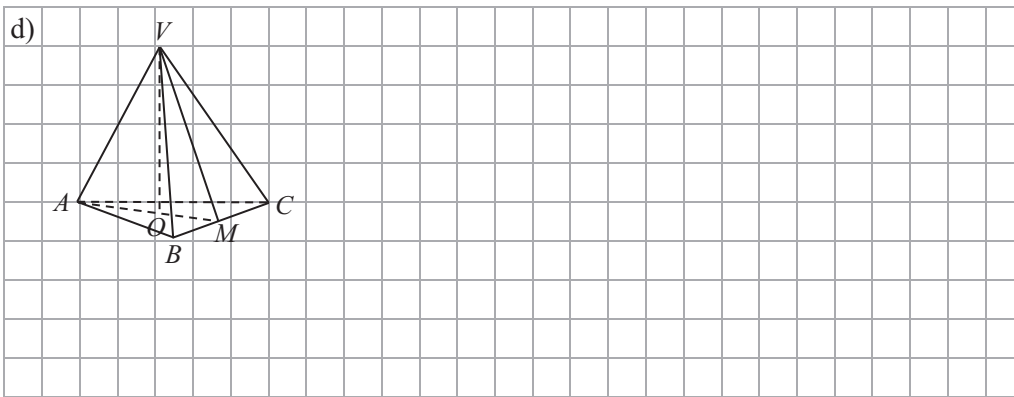


### Știu să rezolv

#### Exerciții și probleme de dificultate minimă

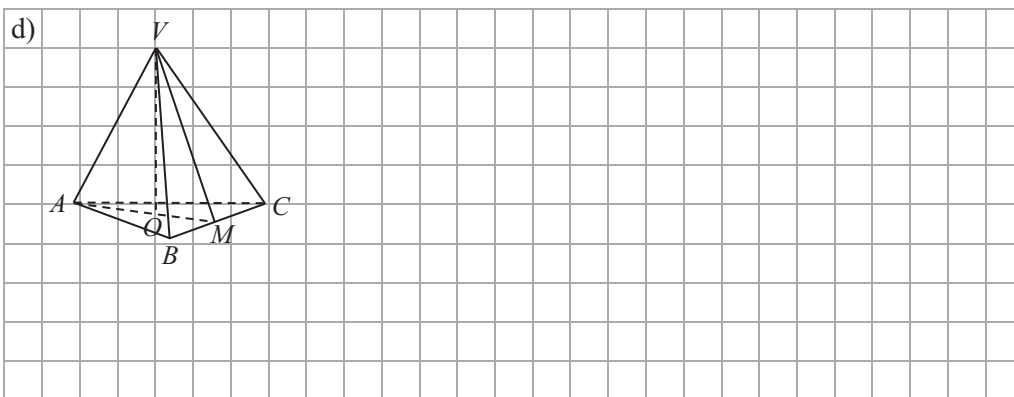
1. Se consideră piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu vârful în  $V$ . Utilizând notațiile specifice piramidei regulate, rezolvați următoarele probleme.

- Dacă  $l = 4$  cm și  $a_p = 3\sqrt{3}$  cm, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $\mathcal{A}_l$ ,  $\mathcal{A}_b$  și  $\mathcal{A}_t$ .
- Dacă  $l = 2$  cm și  $a_p = 5\sqrt{3}$  cm, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $\mathcal{A}_l$ ,  $\mathcal{A}_b$  și  $\mathcal{A}_t$ .
- Dacă  $l = 2$  cm și  $\mathcal{A}_l = 6\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $a_p$  și  $m$ .
- Dacă  $a_p = 3$  cm și  $\mathcal{A}_l = 9\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{P}_b$ ,  $l$  și  $m$ .
- Dacă  $l = 6$  cm și  $h = 4$  cm, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $R$  și  $m$ .
- Dacă  $l = 6$  cm și  $h = 6$  cm, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $\mathcal{V}$ ,  $R$  și  $m$ .



2. Se consideră piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu vârful în  $V$ . Utilizând notațiile specifice piramidei regulate, rezolvați următoarele probleme.

- Dacă  $l = 6$  cm și  $\mathcal{V} = 15\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $h$ ,  $a_b$ ,  $a_p$ ,  $\mathcal{P}_b$  și  $\mathcal{A}_l$ .
- Dacă  $h = 4$  cm și  $\mathcal{V} = 16\sqrt{3}$  cm<sup>3</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $l$ ,  $a_b$ ,  $a_p$ ,  $\mathcal{P}_b$  și  $\mathcal{A}_l$ .
- Dacă  $\mathcal{A}_l = 12\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> și  $\mathcal{A}_t = 16\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $l$ ,  $\mathcal{P}_b$ ,  $a_p$  și  $m$ .
- Dacă  $\mathcal{A}_l = 24\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup> și  $\mathcal{A}_t = 36\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>, aflați  $\mathcal{A}_b$ ,  $l$ ,  $\mathcal{P}_b$ ,  $a_p$  și  $m$ .



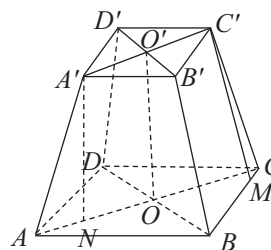


**Soluție:**

a) Construim  $C'M \perp BC$ ,  $M \in BC$ . În  $\Delta C'MC$  cu  $\sphericalangle M = 90^\circ$  aplicăm teorema lui Pitagora:  $m^2 = a_i^2 + \left(\frac{L-l}{2}\right)^2$  sau  $\frac{8\sqrt{2}-l}{2} = 3\sqrt{2}$ , de unde obținem  $l = 2\sqrt{2}$  cm;

$$b) \mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_l}{2} = \frac{40\sqrt{2} \cdot 6}{2} \text{ cm}^2 = 120\sqrt{2} \text{ cm}^2;$$

c) Construim  $A'N \perp (ABC)$ ,  $N \in AC$ , deci  $AN = R - r = 6$  cm. În  $\Delta A'NA$  cu  $\sphericalangle N = 90^\circ$  aplicăm teorema lui Pitagora:  $m^2 = i^2 + (R - r)^2$ , de unde obținem  $i = 3\sqrt{2}$  cm.  $\mathcal{V} = \frac{i}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}) = \sqrt{2}(128 + 8 + 32) \text{ cm}^3 = 168\sqrt{2} \text{ cm}^3$ ;



d) Aplicăm teorema piramidelor asemenea:  $\frac{l}{L} = \frac{h-i}{h}$ , deci  $\frac{1}{4} = \frac{h-3\sqrt{2}}{h}$ , de unde obținem  $h = 4\sqrt{2}$  cm.

**3.** În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată  $ABCA'B'C'$ , care are muchia bazei mari de 6 cm, muchia bazei mici de 3 cm și muchia laterală de  $2\sqrt{3}$  cm, notăm cu  $O$  centrul bazei mari  $ABC$ . Calculați:

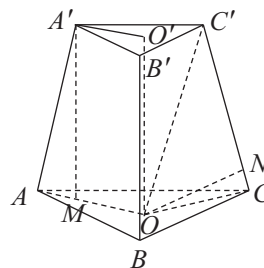
- a)  $i$ ;                      b)  $\mathcal{V}$ ;                      c)  $\sphericalangle(AA', (ABC))$ ;                      d)  $d(O, CC')$ .

**Soluție:**

a) Notăm cu  $O'$  centrul bazei mici și construim  $A'M \perp AO$ ,  $M \in AO$ .  $L = R\sqrt{3}$ , deci  $6 = R\sqrt{3}$ , de unde obținem  $R = 2\sqrt{3}$  cm și, analog, rezultă că  $r = \sqrt{3}$  cm. În  $\Delta A'MA$  cu  $\sphericalangle M = 90^\circ$  aplicăm teorema lui Pitagora:  $m^2 = i^2 + (R - r)^2$ , de unde obținem  $i = 3$  cm;

$$b) \mathcal{V} = \frac{i}{3} (\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}) \text{ și după efectuarea}$$

calculului obținem  $\mathcal{V} = \frac{63\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3$ ;



c)  $\sphericalangle(AA', (ABC)) = \sphericalangle A'MA$ . În  $\Delta A'MA$  cu  $\sphericalangle M = 90^\circ$ ,  $\sin A = \frac{A'M}{AA'} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , deci  $\sphericalangle A'MA = 60^\circ$ ;

d) Construim  $ON \perp CC'$ ,  $N \in CC'$ . Observăm că  $\mathcal{A}_{O'OC'} = \mathcal{A}_{O'OC} + \mathcal{A}_{OCC'}$  sau  $\frac{3\sqrt{3} \cdot 3}{2} \text{ cm}^2 = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 + \frac{ON \cdot 2\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$  și, efectuând calculele, obținem  $ON = 3$  cm.

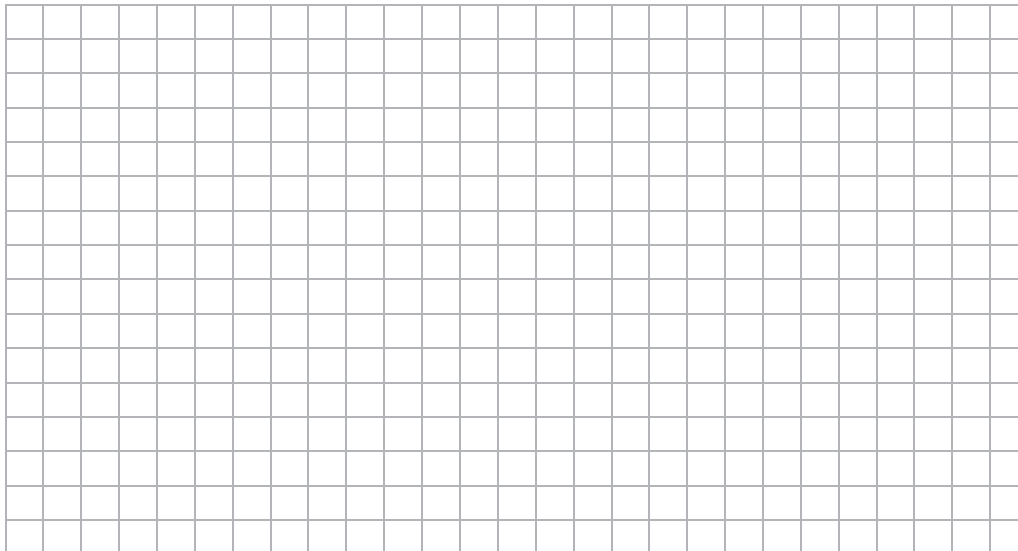
### Exerciții și probleme de dificultate medie

7. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia bazei mari de 12 cm, muchia bazei mici de 4 cm și apotema de 5 cm. Aflați:  
a)  $\mathcal{A}_i$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $i$ ;                      d)  $\mathcal{V}$ .
8. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mari de  $12\sqrt{2}$  cm, muchia bazei mici de  $6\sqrt{2}$  cm și apotema de  $3\sqrt{2}$  cm. Aflați:  
a)  $\mathcal{A}_i$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $i$ ;                      d)  $\mathcal{V}$ .
9. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia bazei mari de  $6\sqrt{6}$  cm, muchia bazei mici de  $2\sqrt{6}$  cm și muchia laterală de 7 cm. Aflați:  
a)  $a_i$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $i$ ;                      d)  $\mathcal{V}$ .
10. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mari de 12 cm, muchia bazei mici de 6 cm și muchia laterală de 6 cm. Aflați:  
a)  $a_i$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $i$ ;                      d)  $\mathcal{V}$ .
11. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia bazei mari de  $8\sqrt{2}$  cm, muchia bazei mici de  $2\sqrt{2}$  cm și înălțimea de  $3\sqrt{2}$  cm. Aflați:  
a)  $\mathcal{V}$ ;                      b)  $a_i$ ;                      c)  $\mathcal{A}_i$ ;                      d)  $\mathcal{P}_f$ .
12. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mari de  $6\sqrt{3}$  cm, muchia bazei mici de  $4\sqrt{3}$  cm și înălțimea de  $2\sqrt{6}$  cm. Aflați:  
a)  $\mathcal{V}$ ;                      b)  $\mathcal{P}_f$ ;                      c)  $a_i$ ;                      d)  $\mathcal{A}_i$ .
13. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mari de  $9\sqrt{6}$  cm, muchia bazei mici de  $3\sqrt{6}$  cm și muchia laterală de 12 cm. Calculați:  
a)  $\mathcal{A}_i$ ;                      b)  $i$ ;                      c)  $\mathcal{V}$ ;                      d)  $\sphericalangle(AB, A'C')$ .
14. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia bazei mici de 6 cm, muchia laterală de 6 cm și înălțimea de  $3\sqrt{2}$  cm. Calculați:  
a)  $L$ ;                      b)  $\mathcal{V}$ ;                      c)  $\mathcal{A}_i$ ;                      d)  $\sphericalangle(A'A, (ABC))$ .
15. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mari de  $4\sqrt{3}$  cm, muchia bazei mici de  $2\sqrt{3}$  cm și aria laterală egală cu  $27 \text{ cm}^2$ . Calculați:  
a)  $a_i$ ;                      b)  $\mathcal{P}_f$ ;                      c)  $\mathcal{V}$ ;                      d)  $\sphericalangle(AC, B'C')$ .
16. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia bazei mari de 8 cm, muchia laterală de 5 cm și apotema de 4 cm. Calculați:  
a)  $l$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $\mathcal{V}$ ;                      d)  $\sphericalangle(BC, D'C')$ .
17. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mici de  $2\sqrt{3}$  cm, apotema de 6 cm și aria laterală egală cu  $90\sqrt{3} \text{ cm}^2$ . Calculați:  
a)  $L$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $\mathcal{V}$ ;                      d)  $\sphericalangle((B'BC), (ABC))$ .
18. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată  $ABCD A'B'C'D'$  are muchia bazei mari de  $6\sqrt{6}$  cm, muchia bazei mici de  $2\sqrt{6}$  cm și volumul egal cu  $104 \text{ cm}^3$ . Calculați:  
a)  $i$ ;                      b)  $\mathcal{A}_i$ ;                      c)  $h$ ;                      d)  $\sphericalangle(A'C', BD)$ .
19. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată  $ABC A'B'C'$  are muchia bazei mari de  $6\sqrt{3}$  cm, muchia bazei mici de  $4\sqrt{3}$  cm și volumul egal cu  $38\sqrt{6} \text{ cm}^3$ . Aflați:  
a)  $i$ ;                      b)  $\mathcal{P}_f$ ;                      c)  $\mathcal{A}_i$ ;                      d)  $h$ .



La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

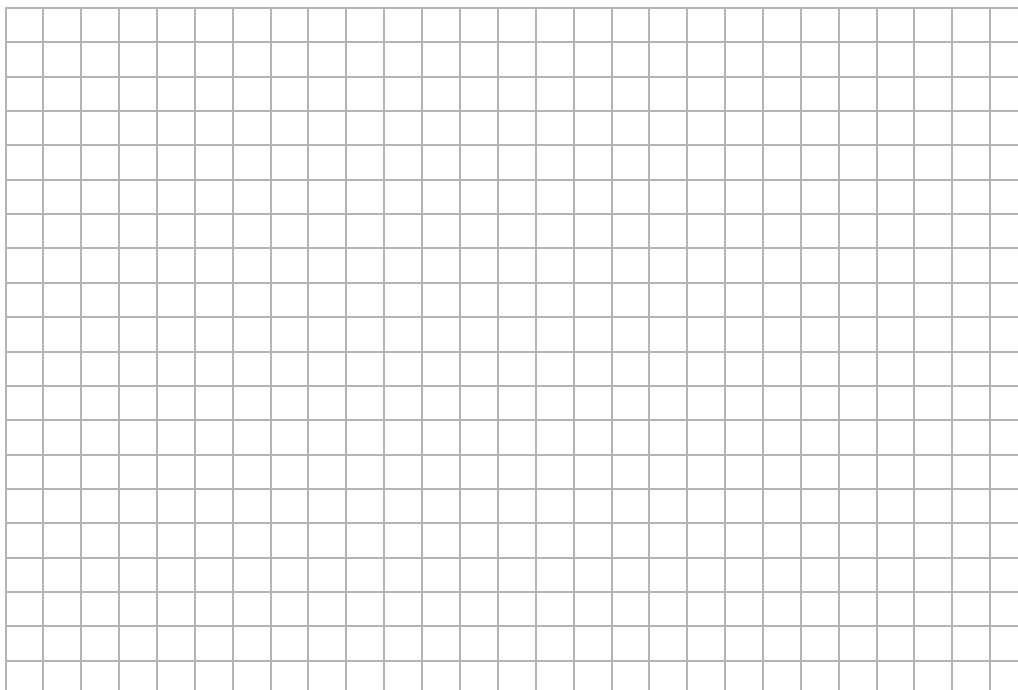
IV. Un tetraedru regulat are volumul egal cu  $18\sqrt{2}$  cm<sup>3</sup>. Calculați suma lungimilor (8p) muchiilor tetraedrului regulat.



V. În piramida triunghiulară regulată  $VABC$  cu vârful în  $V$  notăm cu  $O$  centrul bazei și cu  $M$  mijlocul muchiei  $CV$ . Piramida are apotema de  $2\sqrt{6}$  cm și aria laterală egală cu  $36\sqrt{6}$  cm<sup>2</sup>.

(8p) a) Calculați  $\gamma$ .

(8p) b) Aflați  $\sin(\sphericalangle(VB, OM))$ .



## II.2. CORPURI ROTUNDE

**Definiție:** Un corp geometric care este mărginit parțial sau total de suprafețe neplane (curbe) se numește **corp rotund**.

Corpurile rotunde studiate în acest capitol sunt: cilindrul circular drept, conul circular drept, trunchiul de con circular drept și sfera.

**Definiții:**

**Aria laterală** a unui corp rotund, notată  $\mathcal{A}_l$ , reprezintă aria suprafeței laterale a acestuia.

**Aria totală** a unui corp rotund, notată  $\mathcal{A}_t$ , reprezintă suma dintre aria laterală a corpului rotund și aria bazei (bazelor).

**Volumul** unui corp rotund, notat  $\mathcal{V}$ , reprezintă spațiul (geometric) pe care îl ocupă acesta.

### Lecția 11. Cilindrul circular drept



#### Citesc și rețin

**Notații utilizate:**  $R$  – raza cilindrului circular drept,  $G$  – lungimea generatoarei cilindrului circular drept,  $h$  – lungimea înălțimii cilindrului circular drept,  $\mathcal{A}_b$  – aria bazei cilindrului circular drept,  $\mathcal{A}_l$  – aria laterală a cilindrului circular drept,  $\mathcal{A}_t$  – aria totală a cilindrului circular drept,  $\mathcal{V}$  – volumul cilindrului circular drept.

$$\mathcal{A}_l = 2\pi R G,$$

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi R(G + R),$$

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi R^2 h.$$



#### Cum se aplică?

**1.** Se consideră un cilindru circular drept cu  $R = 4$  cm și  $G = 5$  cm. Aflați  $\mathcal{A}_l$ ,  $\mathcal{A}_t$  și  $\mathcal{V}$ .

**Soluție:**

$$\mathcal{A}_l = 2\pi R G = 2\pi \cdot 4 \cdot 5 \text{ cm}^2 = 40\pi \text{ cm}^2; \mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 40\pi \text{ cm}^2 + 2\pi R^2 = 40\pi \text{ cm}^2 + 32\pi \text{ cm}^2 = 72\pi \text{ cm}^2; \mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = 16\pi \cdot 5 \text{ cm}^3 = 80\pi \text{ cm}^3.$$

**2.** Un cilindru circular drept are aria laterală egală cu  $30\pi \text{ cm}^2$  și aria totală egală cu  $48\pi \text{ cm}^2$ . Calculați:

a)  $R$ ;

b)  $G$ .

**Soluție:**

a)  $\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b$ , deci  $48\pi \text{ cm}^2 = 30\pi \text{ cm}^2 + 2\mathcal{A}_b$ , de unde rezultă că  $2\mathcal{A}_b = 18\pi \text{ cm}^2$  sau  $\mathcal{A}_b = 9\pi \text{ cm}^2$ , prin urmare  $\pi R^2 = 9\pi$ , deci  $R^2 = 9 \text{ cm}^2$  și obținem  $R = 3$  cm;

b)  $\mathcal{A}_l = 30\pi \text{ cm}^2$ , deci  $2\pi R G = 30\pi \text{ cm}^2$  sau  $6\pi G = 30\pi \text{ cm}$ , de unde obținem  $G = 5$  cm.



## Modele de teste pentru evaluarea cunoștințelor

Capitolele: Calcul algebric în  $\mathbb{R}$ , Funcții, Elemente ale geometriei în spațiu, Arii și volume ale unor corpuri geometrice, Corpuri rotunde

### Testul 1

Se acordă 10 puncte din oficiu.

#### Subiectul I. Încercuți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (7p) 1. Se consideră funcția  $f: \{-2, 0, 3\} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = x^2 - 1$ . Valoarea funcției în punctul 0 este egală cu:  
A. 0;                      B. -1;                      C. -3;                      D. 2.
- (7p) 2. Scriind sub forma cea mai simplă rezultatul calculului  $\frac{x-1}{6x^4} : \frac{x-1}{3x^3}$ , obținem:  
A.  $\frac{1}{2x}$ ;                      B.  $\frac{x-1}{3x}$ ;                      C.  $\frac{4x}{x-1}$ ;                      D.  $\frac{3x}{2}$ .
- (7p) 3. Numărul de soluții reale ale ecuației  $x^2 - 3x + 2 = 0$  este egal cu:  
A. 0;                      B. 1;                      C. 2;                      D. 3.
- (7p) 4. Graficul funcției  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = 3x + 1$  intersectează axa  $Oy$  a sistemului de axe ortogonale  $xOy$  în punctul:  
A.  $M(0; 1)$ ;                      B.  $N(0; 3)$ ;                      C.  $P(1; 0)$ ;                      D.  $Q(3; 0)$ .
- (7p) 5. Aria laterală a cilindrului circular drept cu  $R = 2$  cm și  $G = 5$  cm este egală cu:  
A.  $15\pi$  cm<sup>2</sup>;                      B.  $30\pi$  cm<sup>2</sup>;                      C.  $25\pi$  cm<sup>2</sup>;                      D.  $20\pi$  cm<sup>2</sup>.
- (7p) 6. Volumul paralelipipedului dreptunghic cu  $L = 3$  dm,  $l = 1$  dm și  $h = 4$  dm este egal cu:  
A.  $14$  dm<sup>3</sup>;                      B.  $16$  dm<sup>3</sup>;                      C.  $12$  dm<sup>3</sup>;                      D.  $18$  dm<sup>3</sup>.

#### Subiectul al II-lea. La următoarele probleme scrieți rezolvările complete.

- (8p) 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3x^2 + 5x - 2 = 0$ .
2. Se consideră expresia  $E(x) = (2x - 2) \cdot \left( \frac{x+2}{6x} - \frac{3x+2}{2x-8} \cdot \frac{x^2-4x}{9x^2-4} \right) + 1$ , unde  
 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, 4 \right\}$ .
- (8p) a) Arătați că  $E(x) = 9x^2 - 6x + 1$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3}, 1, 4 \right\}$ .
- (8p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{E(x)} = 2$ .
- (8p) 3. Calculați aria totală a trunchiului de con circular drept care are  $R = 5$  cm,  $r = 2$  cm și  $V = 52$  cm<sup>3</sup>.
4. Se consideră piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful în  $V$ , care are muchia bazei de  $4\sqrt{3}$  cm și înălțimea de  $2\sqrt{6}$  cm.
- (8p) a) Calculați aria laterală a piramidei.
- (8p) b) Determinați  $\sin[\angle(VB, (VAD))]$ .

## Teste de evaluare finală

### Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (0,5p) 1. Cardinalul mulțimii  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 5\}$  este egal cu:  
A. 3; B. 6; C. 5; D. 4.
- (0,5p) 2. Cel mai mic număr întreg din intervalul  $(-4; 3)$  este:  
A. -3; B. 0; C. -4; D. 3.
- (0,5p) 3. Soluția ecuației  $1 - x = 4$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , este egală cu:  
A. -4; B. -5; C. -3; D. -6.
- (0,5p) 4. Rezultatul calculului  $(x + x)^3 : (4x)$  este egal cu:  
A.  $x^2$ ; B.  $2x^2$ ; C.  $4x$ ; D.  $x^3$ .
- (0,5p) 5. Soluția ecuației  $x^2 - 1 = 0$  în mulțimea numerelor reale este:  
A.  $\{0, 1\}$ ; B.  $\{-1, 0\}$ ; C.  $\{1, 2\}$ ; D.  $\{-1, 1\}$ .
- (0,5p) 6. Valoarea fracției algebrice  $F(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$  pentru  $x = -2$  este egală cu:  
A. -3; B. 4; C. 8; D. -1.
- (0,5p) 7. Volumul cilindrului circular drept cu  $R = 2$  cm și  $G = 5$  cm este egal cu:  
A.  $20\pi$  cm<sup>3</sup>; B.  $25\pi$  cm<sup>3</sup>; C.  $30\pi$  cm<sup>3</sup>; D.  $35\pi$  cm<sup>3</sup>.
- (0,5p) 8. Aria totală a unui tetraedru regulat cu muchia de 4 cm este egală cu:  
A.  $8\sqrt{2}$  cm<sup>2</sup>; B.  $4\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; C.  $16\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>; D.  $16$  cm<sup>2</sup>.
- (0,5p) 9. Dacă  $ABCA'B'C'$  este o prismă triunghiulară regulată, atunci măsura unghiului format de dreptele  $A'B'$  și  $BC$  este de:  
A.  $30^\circ$ ; B.  $45^\circ$ ; C.  $60^\circ$ ; D.  $90^\circ$ .

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

- (0,8p) 1. Știind că  $\sqrt{5} < 2,25$ , determinați cel mai mare număr întreg care verifică inecuația  $(\sqrt{5}x - 3)^2 + 1 > (\sqrt{5}x - 5\sqrt{2})(\sqrt{5}x + 5\sqrt{2})$ .
2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ .
- (0,7p) a) Calculați media aritmetică a numerelor  $f(-\sqrt{2})$  și  $f(\sqrt{2})$ .
- (0,8p) b) Reprezentați grafic funcția în sistemul de axe ortogonale  $xOy$  și calculați distanța de la punctul  $O$  la graficul funcției  $f$ .
3. Piramida patrulateră regulată  $VABCD$  cu vârful în  $V$  are muchia bazei de 6 cm și înălțimea de 3 cm, iar  $AC \cap BD = \{O\}$ .
- (0,7p) a) Calculați volumul piramidei  $VABCD$ .
- (0,8p) b) Calculați distanța de la punctul  $O$  la muchia  $VA$ .
- (0,7p) c) Aflați măsura unghiului dintre planele  $(VAC)$  și  $(VDC)$ .

# Modele de teste pentru Evaluarea Națională

Se acordă 10 puncte din oficiu.  
Timpul efectiv de lucru este de 2 ore.

## Testul 1

**Subiectul I.** Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (5p) 1. Cel mai mare număr natural de forma  $\overline{4x4}$  divizibil cu 3 este:  
a) 464;                      b) 474;                      c) 484;                      d) 494.
- (5p) 2. Se consideră mulțimile  $E = \{a, b, c, d\}$  și  $F = \{d, p, t\}$ . Cardinalul mulțimii  $E \cup F$  este egal cu:  
a) 4;                          b) 5;                          c) 6;                          d) 7.
- (5p) 3. Prețul unui abonament telefonic după o ieftinire cu 4% este de 48 lei. Prețul abonamentului telefonic înainte de ieftinire a fost de:  
a) 50 lei;                      b) 52 lei;                      c) 60 lei;                      d) 72 lei.
- (5p) 4. Se consideră numărul  $x = \sqrt{5^{11} - 5^{10}}$ . Numărul  $x$  este egal cu:  
a)  $5^5 \sqrt{2}$ ;                      b)  $5 \cdot 2^8$ ;                      c)  $2 \cdot 5^5$ ;                      d)  $5^4 \sqrt{5}$ .
- (5p) 5. În tabelul următor sunt reprezentate numele și anul nașterii pentru componenții unei echipe de baschet.

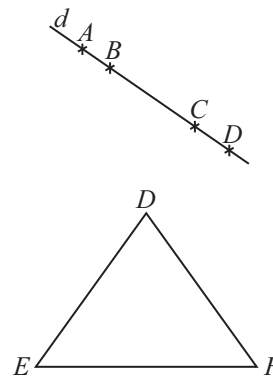
Numele	Alin	Eugen	Andrei	Dan	Cosmin
Anul nașterii	1997	1996	1998	1997	1998

Cel mai vârstnic component al echipei de baschet este:

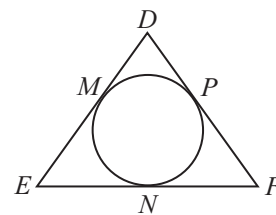
- a) Alin;                      b) Eugen;                      c) Andrei;                      d) Dan.
- (5p) 6. Ioana afirmă că „singurul număr natural de două cifre care este atât pătrat perfect cât și cub perfect este 64”. Afirmatia Ioanei este:  
a) adevărată;                      b) falsă.

**Subiectul al II-lea.** Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

- (5p) 1. În figura alăturată, pe dreapta  $d$  sunt reprezentate punctele  $A, B, C$  și  $D$ . Numărul segmentelor determinate de cele patru puncte este egal cu:  
a) 3;                          b) 4;  
c) 5;                          d) 6.
- (5p) 2. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral  $DEF$ . Dacă semiperimetrul triunghiului  $DEF$  este egal cu 15 cm, atunci lungimea laturii  $EF$  este egală cu:  
a) 5 cm;                      b) 10 cm;  
c) 15 cm;                      d) 20 cm.

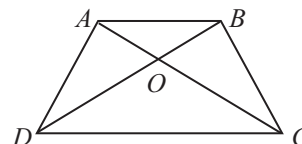


(5p) 3. În figura alăturată,  $M$ ,  $N$  și  $P$  sunt punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul  $DEF$  cu laturile acestuia. Dacă  $DM = 3$  cm,  $EN = 4$  cm și  $FP = 5$  cm, atunci lungimile laturilor  $DE$ ,  $EF$  și  $FD$  sunt egale cu:



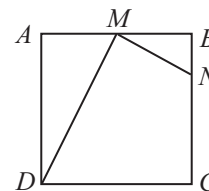
- a) 7 cm, 9 cm, 8 cm;      b) 6 cm, 8 cm, 10 cm;  
c) 7 cm, 8 cm, 10 cm;    d) 8 cm, 9 cm, 10 cm.

(5p) 4. În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel  $ABCD$  cu  $AB \parallel CD$  și  $AC \cap BD = \{O\}$ . Dacă  $\mathcal{P}_{ABD} = 35$  cm și  $\mathcal{P}_{BCO} = 28$  cm, atunci lungimea bazei mici  $AB$  este egală cu:



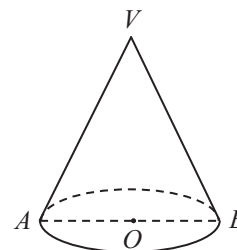
- a) 9 cm;                              b) 6 cm;  
c) 8 cm;                              d) 7 cm.

(5p) 5. Pătratul  $ABCD$  din figura alăturată reprezintă schematic o placă de gresie care s-a spart în trei bucăți. Dacă latura pătratului este de 4 dm,  $AM \equiv MB$  și  $\sphericalangle DMN = 90^\circ$ , atunci aria patrulaterului  $MNCD$  este egală cu:



- a)  $14 \text{ dm}^2$ ;                              b)  $10 \text{ dm}^2$ ;  
c)  $11 \text{ dm}^2$ ;                              d)  $12 \text{ dm}^2$ .

(5p) 6. În figura alăturată este reprezentat un con circular drept. Dacă secțiunea axială  $VAB$  a conului are perimetrul de 70 cm, iar raza și generatoarea sunt direct proporționale cu numerele 2 și 5, atunci aria laterală a conului este egală cu:



- a)  $100\pi \text{ cm}^2$ ;                              b)  $250\pi \text{ cm}^2$ ;  
c)  $200\pi \text{ cm}^2$ ;                              d)  $125\pi \text{ cm}^2$ .

**Subiectul al III-lea. Scrieți rezolvările complete.**

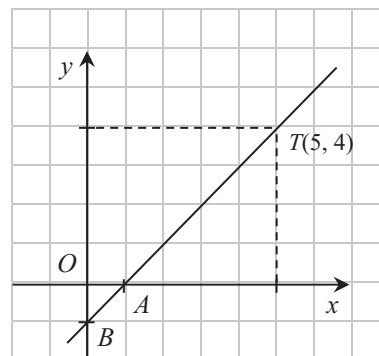
1. Ștefan este fiul lui Ion. În urmă cu trei ani, vârsta lui Ion era de 7 ori mai mare decât vârsta lui Ștefan, iar peste un an vârsta lui Ștefan va fi de 4 ori mai mică decât vârsta lui Ion.

- (3p) a) Calculează vârsta lui Ștefan și vârsta lui Ion.  
(2p) b) Peste câți ani vârsta lui Ion va fi de 3 ori mai mare decât vârsta lui Ștefan?

2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - 1$ .

(2p) a) Dacă  $A$  și  $B$  sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției  $f$  cu axele  $Ox$ , respectiv  $Oy$ , ale sistemului de axe ortogonale  $xOy$ , determină măsurile unghiurilor triunghiului  $OAB$ .

(3p) b) Determină punctele situate pe graficul funcției  $f$  la distanța  $3\sqrt{2}$  u față de punctul  $T(5; 4)$ .



3. Se dă expresia  $E(x) = \left( \frac{x+5}{2x-2} + \frac{3-x}{x^2-2x+1} \right)^4 : \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^6$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ .

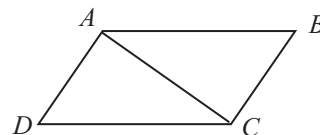
(3p) a) Arată că  $E(x) = \frac{1}{16} \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2$ , pentru orice număr real  $x$ ,  $x \neq -1$  și  $x \neq 1$ .

(2p) b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{E(x)} = 1$ .

4. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul  $ABCD$ . Se știe că  $AB = 2BC$  și  $\sphericalangle DAB = 2 \cdot \sphericalangle ABC$ .

(2p) a) Determină măsurile unghiurilor paralelogramului  $ABCD$ .

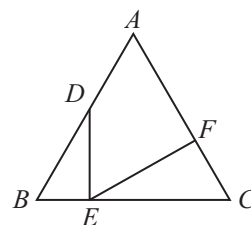
(3p) b) Determină raportul  $\frac{\sphericalangle BAC}{\sphericalangle DAC}$ .



5. În figura alăturată, triunghiul echilateral  $ABC$  reprezintă schematic un panou solar, iar segmentele  $DE$  și  $EF$  reprezintă două bare metalice care oferă rezistență panoului. Se știe că  $\mathcal{P}_{ABC} = 24$  m,  $DB = 4$  m,  $EC = 6$  m și că  $\triangle DBE \sim \triangle ECF$ .

(2p) a) Calculează aria triunghiului  $ADF$ .

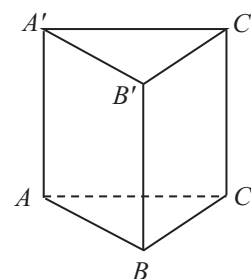
(3p) b) Determină măsura unghiului  $DEF$ .



6. În figura alăturată este reprezentat schematic un panou publicitar în formă de prismă triunghiulară regulată, notată  $ABCA'B'C'$ . Se știe că prisma are muchia bazei de  $4\sqrt{3}$  m și aria laterală egală cu  $144\sqrt{2}$  m<sup>2</sup>.

(2p) a) Calculează volumul prisme triunghiulare regulate  $ABCA'B'C'$ .

(3p) b) Determină măsura unghiului dintre dreapta  $BC'$  și planul  $(A'AB)$ .



## Testul 2

**Subiectul I. Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.**

(5p) 1. Scrierea numărului 400 ca produs de puteri de numere prime este:

a)  $2^3 \cdot 5^3$ ;      b)  $2^4 \cdot 5^2$ ;      c)  $2^5 \cdot 5^2$ ;      d)  $2^4 \cdot 5^3$ .

(5p) 2. Dintre următoarele seturi de puteri, cel scris în ordine crescătoare este:

a)  $4^{16}, 8^{11}, 2^{30}$ ;      b)  $8^{11}, 2^{30}, 4^{16}$ ;      c)  $2^{30}, 4^{16}, 8^{11}$ ;      d)  $8^{11}, 4^{16}, 2^{30}$ .

(5p) 3. În anul 2020 o persoană a împlinit vârsta de 27 ani. Persoana respectivă va împlini 65 de ani în anul:

a) 2058;      b) 2045;      c) 2065;      d) 2047.

(5p) 4. Mulțimea soluțiilor ecuației  $x^2 = 1, (7)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , este:

a)  $\left\{ -\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right\}$ ;      b)  $\left\{ -\frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right\}$ ;      c)  $\left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\}$ ;      d)  $\left\{ -\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right\}$ .

# INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

## ALGEBRĂ

### CAPITOLUL II – CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

#### Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice

1. a)  $\frac{6-2x}{5x^4}$ ; b)  $\frac{3x+3}{7x^2}$ ; c)  $\frac{4x-1}{2x^3}$ ; d)  $\frac{8x-13}{4x^2}$ . 2. a)  $8x$ ; b)  $3x$ ; c)  $2x$ ; d)  $4x$ . 3. a)  $\frac{10x+1}{4x}$ ;  
b)  $\frac{4-16x}{9x}$ ; c)  $-\frac{2x+25}{12x^2}$ ; d)  $\frac{x+29}{15x^2}$ . 4. a)  $\frac{14x-7}{8x}$ ; b)  $\frac{5x-5}{9x}$ ; c)  $\frac{7x+13}{18x^2}$ ; d)  $\frac{17}{24x^2}$ .  
5. a)  $\frac{3-5x}{3x^2}$ ; b)  $\frac{3x^2+2}{4x^4}$ ; c)  $\frac{2x^2-15}{6x^5}$ . 6. a)  $\frac{5-8x^2}{6x^3}$ ; b)  $\frac{5x-14}{10x^3}$ ; c)  $\frac{21x^3+10}{12x^5}$ .  
7. a)  $\frac{4-x}{x^2-2x}$ ; b)  $\frac{3x+8}{12x^2-12x}$ ; c)  $\frac{14-5x^2}{4x^3+2x^2}$ . 8. a)  $\frac{2x+1}{8x^3+4x^2}$ ; b)  $\frac{5x-1}{24x^3+8x^2}$ ; c)  $\frac{3x-5}{18x^3-6x^2}$ .  
9. a)  $\frac{5}{x^3}$ ; b)  $\frac{7}{x^3}$ . 10. a)  $\frac{7x^2+10}{18x^2-12x}$ ; b)  $\frac{3x^2-4}{24x^2-12x}$ . 11. a)  $\frac{9}{x^3-6x^2+9x}$ ; b)  $\frac{4}{x^3+4x^2+4x}$ ;  
c)  $-\frac{1}{9x^3+6x^2+x}$ ; d)  $\frac{1}{4x^3+4x^2+x}$ . 12. a)  $\frac{x-2}{x+2}$ ; b)  $\frac{x+3}{x-3}$ ; c)  $\frac{x}{x-5}$ ; d)  $\frac{2x-1}{2x+1}$ .  
13. a)  $\frac{1}{x^2-3x}$ ; b)  $\frac{4x+4}{x(x^2-4)}$ . 14. a)  $E(x) = -\frac{x^3+15x+3}{4x^4-x^2}$ ; b)  $E(x) = -\frac{x^3+9x+10}{4x^3-9x^5}$ . 15. a)  $E(x) =$   
 $= \frac{2x^3+61x-3}{(x+3)(x-3)^2}$ ; b)  $E(x) = \frac{-4x^3-43x+2}{(x-2)(x+2)^2}$ . 16.  $E(x) = 1$ . 17.  $E(x) = \frac{2}{|x^2-1|}$ ,  $n = \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{2 \cdot 4} +$   
 $+\frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{10 \cdot 12} = \frac{175}{132} = 1,32(57)$ ;  $n = 1,3258$ .

#### Ce notă merit? Test de evaluare stadială

1. a)  $x$ ; b)  $\frac{x-1}{2x^2-6x}$ . 2.  $\frac{4x}{4x^2-1}$ . 3.  $E(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$ .

#### Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice

1. a)  $\frac{16y^3}{25x^7}$ ; b)  $\frac{21x}{8y^4}$ ; c)  $\frac{10y^3}{21x^5}$ ; d)  $\frac{20x^3}{27y^4}$ . 2. a)  $\frac{x^2+x}{3y^2-3y}$ ; b)  $\frac{2y^2-4y}{x^4-3x^3}$ ; c)  $\frac{x^2+3x}{5y^2-20y}$ ;  
d)  $\frac{5y-y^2}{6x^2-12x}$ . 3. a)  $\frac{4x^5-8x^4+12x^3}{x-4}$ ; b)  $\frac{-4x^5-4x^4+4x^3}{x+2}$ ; c)  $\frac{20x^5+4x^4-8x^3}{x+3}$ ;  
d)  $\frac{12x^5+4x^4-20x^3}{7-x}$ . 4. a)  $\frac{x^2-1}{x^2-3}$ ; b)  $\frac{x^3-1}{5+x}$ ; c)  $\frac{x^3-2x^2+1}{x+8}$ ; d)  $\frac{x^2-2x+1}{7-x^3}$ . 5. a)  $\frac{x^2-9}{x^2-4}$ ;  
b)  $\frac{x^2-16}{x^2-1}$ ; c)  $\frac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$ ; d)  $\frac{x^2+4x+4}{x^2-12x+36}$ . 6. a)  $\frac{x^2+4x+3}{x^2-x-6}$ ; b)  $\frac{x^2-2x-24}{x^2+x-20}$ ;  
c)  $\frac{-x^2+x+30}{-x^2-5x+14}$ ; d)  $\frac{-x^2-7x+18}{x^2+3x-40}$ . 7. a)  $\frac{8x^2-6x+1}{15x^2+16x+4}$ ; b)  $\frac{-48x^2+46x-5}{8x^2-6x-9}$ ;

### Teste de evaluare sumativă

**Testul 1. 5.**  $D(\sqrt{6}; \sqrt{6})$ . **6.**  $d(A, G_g) = 6$  u. **Testul 2. 5.**  $60^\circ$ . **6.**  $a = \frac{1}{3}$ . **Testul 3. 5.**  $A(\sqrt{2}; -3)$ .  
**6.**  $M_1(-3; -1), M_2(1; 3)$ .

### Fișă pentru portofoliul elevului

**I. 1. A. 2. F. 3. A. II. 1. 4. 2.**  $M(0; 3)$ . **3. 2. III. 1. B.** 5 u. **2. A.** 1. **3. D.**  $M(6; 5)$ . **IV.**  $(a-1)^2 + (a+b)^2 = 0$ , deci  $a = 1$  și  $b = -1$ , prin urmare  $g(x) = x - 1$ . **V. a)**  $G_f \cap Ox = \{A(2; 0)\}$  și  $G_f \cap Oy = \{B(0; -4)\}$ ; **b)**  $M(1; -2), N(-1; 2)$ ;  $\mathcal{A}_{AON} = \mathcal{A}_{BON} = 2$  u<sup>2</sup>.

### Probleme din realitatea cotidiană

**1.**  $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{N}^*, f(z) = z + 1$ . **2.**  $f: \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow \mathbb{N}^*, f(t) = 2t$ . **3.**  $L = 3$  dm,  $l = 2$  dm.  
**4.** 38 dam. **5.**  $\mathcal{P} = 40$  m. **6.**  $\mathcal{V} = 45$  dm<sup>3</sup>. **7.**  $\mathcal{V} = 0,16\pi$  m<sup>3</sup>. **8.** 30 august. **9.** 48 exerciții. **10.** 6,92.  
**11.**  $\mathcal{A} = 1200$  m<sup>2</sup>. **12.** 16 apartamente. **13.** 15 dam. **14.** 8 ani, 18 ani. **15.** 60 km/h. **16.** 192 dm<sup>2</sup>.  
**17. F. 18.** Se determină funcția care are ca reprezentare grafică dreapta  $EF$  și apoi se arată că  $f(5) = 2$ . **19.**  $C(2; 2)$ . **20.**  $P(31; 42)$ .

## GEOMETRIE

### CAPITOLUL I – ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

#### Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte

**1. B.**  $EF \perp \theta$ . **2. a)** Proiecția punctului  $A$  pe planul  $\alpha$  este punctul  $B$ ; **b)** Analog; **c)** Analog.  
**3. A.**  $MN \not\perp \beta$ . **4. a)** Proiecția segmentului  $AB$  pe planul  $\alpha$  este segmentul  $PQ$ ; **b)** Analog; **c)** Analog. **5. a)** A; **b)** F; **c)** A. **6. a)**  $\text{pr}_{(ABC)} A' = A$ ; **b)**  $\text{pr}_{(ABC)} C' = C$ ; **c)**  $\text{pr}_{(A'B'C')} B = B'$ .  
**7. a)**  $\text{pr}_{(A'AD)} B = A$ ; **b)**  $\text{pr}_{(C'CD)} A = D$ ; **c)**  $\text{pr}_{(A'AB)} C' = B'$ ; **d)**  $\text{pr}_{(B'BC)} D' = C'$ . **8. a)** F; **b)** A; **c)** A; **d)** A.  
**9. a)** A; **b)** A; **c)** A; **d)** A. **10. a)**  $\text{pr}_{(A'B'C')} BC' = B'C'$ ; **b)**  $\text{pr}_{(ABC)} D'B = DB$ ; **c)**  $\text{pr}_{(A'AD)} A'C = A'D$ ; **d)**  $\text{pr}_{(B'BC)} B'D = B'C$ . **11. a)**  $D'O'$ ; **b)**  $AO$ ; **c)**  $B'O$ ; **d)**  $AO'$ . **12. a)**  $\{O\} = AC \cap BD$ ;  $DO = 4$  cm; **b)**  $VO = 3$  cm. **13. a)**  $BO = 2\sqrt{3}$  cm,  $O = \text{pr}_{(ABC)} A$ ; **b)**  $AM = 3\sqrt{3}$  cm. **14. a)**  $AD' = 12$  cm; **b)**  $AC \cap BD = \{O\}$ .  $B'O = 6\sqrt{3}$  cm. **15. a)** Construim  $MN \perp A'C'$ ,  $N \in A'C'$ , deci  $\text{pr}_{(A'AC)} AM = AN$ ;  $AN = 6$  cm; **b)**  $AC \cap BD = \{O\}$ . Construim  $MP \perp B'D'$ ,  $P \in B'D'$ , așadar  $\text{pr}_{(B'BD)} CM = OP$ ;  $OP = 6$  cm. **16.** Notăm cu  $G$  centrul de greutate al  $\Delta A'BC'$  și cu  $a$  lungimea muchiei  $B'B$ , iar  $A'C' \cap B'D' = \{O\}$ . Cum  $A'O \equiv C'O$ , rezultă că  $G \in BO$ . Observăm că  $A'C' \perp (B'BG)$ , deci  $A'C' \perp B'D'$ , prin urmare  $A'B'C'D'$  este pătrat. Deoarece  $\sphericalangle BB'O' = 90^\circ$ , avem  $\frac{B'O'^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ ,

de unde rezultă că  $B'O' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ , deci  $A'B' = a$ , prin urmare  $ABCD A'B'C'D'$  este cub.

**17. „ $\Rightarrow$ ”** Notăm cu  $O$  centrul bazei  $ABCD$  și cu  $O_1$  centrul feței laterale  $VBC$ . Deoarece  $l = m$ , rezultă că  $OVBC$  este piramidă regulată, deci  $\text{pr}_{(VBC)} O = O_1$ . „ $\Leftarrow$ ” Deoarece  $\text{pr}_{(VBC)} O = O_1$ , rezultă că  $\Delta OO_1B \equiv \Delta OO_1V \equiv \Delta OO_1C$ , deci  $BO \equiv VO \equiv CO$ , prin urmare  $\Delta BOC \equiv \Delta VOC$ , așadar  $l = m$ .

#### Ce notă merit? Test de evaluare stadială

**1. a)** D; **b)** B'; **c)** O, unde  $\{O\} = AC \cap BD$ . **2. a)**  $P'Q'$ ; **b)**  $N'P'$ ; **c)**  $Q'O$ , unde  $\{O\} = MP \cap NQ$ .  
**3.**  $AO \cap BC = \{O\}$ ;  $VM = 2\sqrt{7}$  cm.

## Cuprins

### ALGEBRĂ

#### CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN $\mathbb{R}$

Lecția 1. Adunarea și scăderea fracțiilor algebrice.....	5
Lecția 2. Înmulțirea fracțiilor algebrice.....	9
Lecția 3. Împărțirea fracțiilor algebrice.....	13
Lecția 4. Ridicarea la putere cu exponent natural a fracțiilor algebrice .....	17
Lecția 5. Ordinea efectuării operațiilor cu fracții algebrice și folosirea parantezelor.....	20
Lecția 6. Ecuatii de forma $ax^2 + bx + c = 0$ , $x, a, b, c \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ .....	27
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	32
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	34

#### CAPITOLUL III. FUNCȚII

Lecția 7. Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite .....	37
Lecția 8. Graficul unei funcții. Reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice .....	42
Lecția 9. Funcții de forma $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = ax + b$ , $a, b \in \mathbb{R}$ . Interpretare geometrică. Lecturi grafice .....	47
Lecția 10. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = ax + b$ , $a, b \in \mathbb{R}$ și $D \subset \mathbb{R}$ . Interpretare geometrică. Lecturi grafice .....	53
Lecția 11. Elemente de statistică .....	56
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	60
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	61
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i> .....	63

### GEOMETRIE

#### CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Proiecții de puncte, de segmente și de drepte .....	66
Lecția 2. Unghiul dintre o dreaptă și un plan. Lungimea proiecției unui segment .....	70
Lecția 3. Teorema celor trei perpendiculare. Calculul distanței de la un punct la o dreaptă .....	74
Lecția 4. Unghi plan corespunzător diedrului. Unghiul dintre două plane.....	79
Lecția 5. Plane perpendiculare .....	84
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	88
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	89

#### CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

##### II.1. POLIEDRE

Lecția 6. Prisma regulată.....	91
Lecția 7. Paralelipipedul dreptunghic.....	98
Lecția 8. Cubul.....	103
<i>Teste de evaluare sumativă</i> .....	107
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i> .....	108

Lecția 9. Piramida regulată.....	110
Lecția 10. Trunchiul de piramidă regulată .....	118
<i>Teste de evaluare sumativă .....</i>	<i>125</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului.....</i>	<i>127</i>
<b>II.2. CORPURI ROTUNDE</b>	
Lecția 11. Cilindrul circular drept .....	129
Lecția 12. Conul circular drept.....	133
Lecția 13. Trunchiul de con circular drept .....	138
Lecția 14. Sfera .....	143
<i>Teste de evaluare sumativă .....</i>	<i>148</i>
<i>Fișă pentru portofoliul elevului.....</i>	<i>149</i>
<i>Probleme din realitatea cotidiană.....</i>	<i>151</i>
<b>MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA CUNOȘTINȚELOR.....</b>	<b>155</b>
<b>TESTE DE EVALUARE FINALĂ.....</b>	<b>158</b>
<b>MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ .....</b>	<b>161</b>
<b>INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI.....</b>	<b>188</b>