

Steven Strogatz

BUCURIA LUI X

*O INCURSIUNE ÎN LUMEA MATEMATICII,
DE LA UNU LA INFINIT*

Traducere din limba engleză de:
WALTER FOTESCU

EDITURA  HERALD

București

CUPRINS

Prefață	7
---------	---

Partea întâi

NUMERE

1. De la pește la infinit	13
2. Grupuri de pietre	16
3. Dușmanul dușmanului meu	22
4. Comutativitate	28
5. Împărțirea și frustrările sale	34
6. Poziție, poziție, poziție	39

Partea a doua

RELAȚII

7. Bucuria lui X	47
8. Găsiți-vă rădăcinile	52
9. Cada mea de baie s-a revărsat	59
10. Prelucrați-vă pătratele	66
11. Uneltele puterii	73

Partea a treia

FORME

12. Dansul pătratelor	81
13. Ceva din nimic	88
14. Conspirația conicelor	96
15. Sine Qua Non	105
16. Treci la limită	112

Partea a patra

SCHIMBAREA

17. O schimbare în care ne putem încrede	121
18. Taie în felii și cubulețe	127

19. Totul despre <i>e</i>	135
20. Mă iubește, nu mă iubește	142
21. Pășește în lumină	147
Partea a cincea	
DATELE	
22. Noua normalitate	157
23. Sunt șanse	164
24. Descălcind Internetul	170
Partea a șasea	
FRONTIERE	
25. Cele mai singuratice numere	179
26. Gândire de grup	187
27. Răsucește și strigă	195
28. Gândiți global	203
29. Cu nașu' la psihiatru	209
30. Hotelul Hilbert	219
Mulțumiri	229
Note	233

PREFAȚĂ

Am un prieten extrem de pasionat de știință, deși el este artist. De fiecare dată când suntem împreună, tot ce vrea este să discutăm despre ultimele descoperiri din psihologie sau mecanica cuantică. Dar, când vine vorba de matematică, devine confuz și se întristează. Ciudatele simboluri îl țin la distanță. Spune că nici măcar nu știe cum să le pronunțe.

De fapt, alienarea lui e mult mai profundă. El nu prea înțelege ce fac matematicienii toată ziua sau la ce se referă când spun că o demonstrație este elegantă. Uneori glumim că el ar trebui pur și simplu să se așeze, iar eu să-l învăț totul, pornind de la $1 + 1 = 2$ și mergând cât de departe vom putea.

Oricât de ciudat ar părea, tocmai asta voi încerca să fac în cartea aceasta. Este o excursie organizată prin elementele matematicii, de la nivelul preșcolar la cel postuniversitar, pentru oricine vrea să-și mai încerce o dată norocul în domeniu – dar de data aceasta din perspectiva unui adult. Nu e destinată a fi un remediu. Scopul este să vă ajute să aveți o impresie mai bună despre ce este de fapt matematica și de ce este atât de captivantă pentru cei care o înțeleg.

Vom descoperi de ce aruncările la coș¹ ale lui Michael Jordan pot contribui la explicarea bazelor analizei matematice. Vă voi arăta o metodă simplă – și șocantă – pentru a înțelege acel fundament al geometriei care este teorema

¹ *Dunk*; în baschet, punct marcat din săritură în care mingea e trecut prin inel cu mâna. Punctajul este același ca pentru o aruncare obișnuită, dar e considerat a fi o demonstrație de forță și îndemănare. (N.tr.)

lui Pitagora. Vom încerca să dăm de capăt unor mistere ale vieții, mari și mici: E O.J.¹ vinovat de crimă? Cum trebuie să rotiți salteaua pentru a-i minimaliza uzura? Cu câte persoane trebuie să vă întâlniți înainte de a vă căsători? Și vom vedea de ce unii infiniți sunt mai mari decât alții.

Matematica e pretutindeni, dacă știi unde să te uiți. Vom discerne curbe sinusoidale în dungile zebrelor, vom auzi ecouri din Euclid în Declarația de Independență și vom recunoaște semne ale unor numere negative în evenimentele premergătoare Primului Război Mondial. Și vom vedea cum viețile noastre în prezent sunt influențate de noi tipuri de matematică atunci când căutăm restaurante online sau încercăm să înțelegem oscilațiile înspăimântătoare ale bursei de valori – ca să nu spun să le supraviețuim.

Printr-o coincidență cât se poate de potrivită pentru o carte despre numere, aceasta s-a născut în ziua când am împlinit cincizeci de ani. David Shipley, pe atunci editor al paginii de opinii din *New York Times*, mă invitase la prânz în ziua cea mare (fără să știe de semnificația ei semicentenară) și m-a întrebat dacă aș fi dispus să scriu o serie de articole despre matematică pentru cititorii săi. Mi-a surâs ideea să împărtășesc plăcerile matematicii cu o audiență mai largă decât iscoditorul meu prieten artist.

„Elementele matematicii” a apărut online la sfârșitul lui ianuarie 2010 și a continuat timp de cincisprezece săptămâni. Reacția a fost un puhoi de scrisori și comentarii de la cititori de toate vârstele. Mulți dintre cei care au scris erau elevi și profesori. Alții erau oameni curioși care, dintr-un motiv sau altul, au eșuat undeva în educația

¹ Orenthal James (O.J.) Simpson (n.1947), fost jucător profesionist de fotbal american. Procesul în care a fost acuzat de asasinarea fostei sale soții și a prietenului ei a fost unul dintre cele mai cunoscute procese pentru crimă din istoria SUA. (N.tr.)

lor matematică, dar simțeau că le lipsește ceva important și voiau să mai încerce o dată. Deosebit de agreabile erau notele pe care le primeam de la părinții care-mi mulțumeau că-i ajut să le explice această știință copiilor lor și, cu acest prilej, lor înșiși. Până și colegilor mei și împătimiților de matematică au părut să le placă articolele – atunci când nu sugerau îmbunătățiri (sau poate mai ales atunci!).

Una peste alta, experiența aceasta m-a convins că există o foame profundă, deși puțin recunoscută, de matematică în rândurile publicului larg. În pofida a tot ceea ce auzim despre fobia față de matematică, mulți oameni *vor să înțeleagă subiectul* un pic mai bine. Iar atunci când reușesc, constată că au devenit dependenți.

Bucuria lui x este o introducere în ideile cele mai fascinante și mai influente ale matematicii. Capitolele – unele din seria originală din *Times* – nu au mai mult de câteva pagini și sunt în mare măsură independente, așa încât vă puteți înfrupta de oriunde poftiți. Dacă vreți să aprofundați ceva, notele de la sfârșitul cărții oferă detalii suplimentare și recomandări pentru lecturi ulterioare.

Pentru folosul cititorilor care preferă o abordare pas cu pas, am aranjat materialul în șase părți principale, urmând structura programei tradiționale.

Partea întâi, „Numere”, începe călătoria noastră cu aritmetica din grădiniță și școala primară, subliniind cât de utile pot fi numerele și cât de straniu de eficiente sunt ele în a descrie lumea.

Partea a doua, „Relații”, generalizează lucrul cu numere la lucrul cu *relații* între numere. Acestea sunt ideile centrale ale algebrei. Ceea ce le face atât de semnificative este faptul că ele oferă primele instrumente pentru a descrie cum un lucru îl afectează pe altul, prin cauză și efect, cerere și

ofertă, doză și reacție și așa mai departe – genul de relații care fac lumea complicată și bogată.

Partea a treia, „Forme”, se îndreaptă de la numere și simboluri către forme și spațiu – domeniul geometriei și al trigonometriei. Concomitent cu caracterizarea lucrurilor vizuale, aceste subiecte înalță matematica la noi niveluri de rigoare prin logică și demonstrație.

În Partea a patra, „Schimbare”, ajungem la analiza matematică, ramura cea mai pătrunzătoare și mai rodnică a matematicii. Analiza matematică a făcut posibilă prezicerea mișcării planetelor, a ritmului mareelor și, practic, a oricărei alte forme de schimbare continuă în univers și în noi înșine. O temă susținătoare în această parte este rolul infinitului. Domesticirea infinitului a fost progresul care a făcut ca analiza matematică să funcționeze. Prin stăpânirea impunătoarei puteri a infinitului, analiza matematică a reușit în sfârșit să rezolve multe din vechile probleme cu care s-au confruntat anticii și care, în cele din urmă, au dus la revoluția științifică și la lumea modernă.

Partea a cincea, „Datele”, se ocupă de probabilități, statistică, rețele și prospectarea datelor, toate subiecte relativ recente inspirate de latura dezordonată a vieții: șansă și noroc, incertitudine, risc, volatilitate, hazard, interconectivitate. Cu tipurile adecvate de matematică și tipurile adecvate de date, vom vedea cum putem extrage semnificație din această vârtoare.

Pe măsură ce ajungem către finalul călătoriei în Partea a șasea, „Frontiere”, ne apropiem de limitele cunoașterii matematice, granița dintre ceea ce este cunoscut și ceea ce rămâne evaziv. Succesiunea capitolelor urmează structura familiară pe care am folosit-o pretutindeni – numere, relații, forme, schimbare și infinit – dar fiecare dintre aceste

subiecte este acum revizuit mai în profunzime și în întruparea sa modernă.

Sper că toate ideile ce urmează vor aduce bucurie – și un număr apreciabil de momente Aha! Dar orice călătorie trebuie să înceapă cu începutul, așa încât să pornim de la actul simplu, magic, al numărului.

Partea întâi



NUMERE

1. DE LA PEȘTE LA INFINIT

Cea mai bună introducere în teoria numerelor pe care am văzut-o vreodată – explicația cea mai clară și mai amuzantă despre ce sunt numerele și de ce avem nevoie de ele – apare într-un film de animație din seria *Sesame Street*⁽¹⁾ intitulat *1,2,3 Numărați împreună cu mine*. Humphrey, un tip amabil, dar nătâng, cu blană roz și nasul verde, lucrează în schimbul de amiază la Hotelul Brațe Îmblânite când primește un telefon de la o cameră plină cu pinguini. Humphrey ascultă cu atenție, după care transmite la bucatărie comanda lor: „pește, pește, pește, pește, pește, pește”. Aceasta îl îndeamnă pe Ernie să-l lămurească în privința virtuților numărului șase.



Copiii învață de aici că numerele sunt scurtături minunate. În loc să rostească cuvântul „pește” de exact atâtea ori

câți pinguini sunt, Humphrey ar putea folosi conceptul mai puternic de șase.

Ca adulți însă, am putea observa un potențial inconvenient al numerelor. Desigur, ele realizează o mare economie de timp, dar cu prețul abstractizării. Șase este mai eteric decât șase pești, tocmai fiindcă este mai general. El se aplică la șase de orice fel: șase farfurii, șase pinguini, șase rostiri ale cuvântului „pește”. Este inefabilul pe care toate acestea îl au în comun.

Văzute în această lumină, numerele încep să pară un pic misterioase. Aparent, ele există într-un fel de tărâm platonice, un nivel mai presus de realitate. În această privință ele seamănă mai mult cu alte concepte elevate (ca de pildă adevărul și dreptatea) și mai puțin cu obiectele obișnuite ale vieții de zi cu zi. După o reflecție aprofundată, statutul lor filosofic devine încă și mai tenebros. De unde anume provin numerele? Omenirea le-a inventat? Sau le-a descoperit?

O subtilitate suplimentară este că numerele (și, de fapt, toate ideile matematice) au viața lor proprie.⁽²⁾ Nu le putem controla. Chiar dacă ele există în mintea noastră, odată ce am decis asupra semnificației lor, comportamentul lor nu mai depinde de noi. Ele ascultă de anumite legi și au anumite proprietăți, personalități și moduri de a se combina unele cu altele, iar în privința aceasta tot ce putem face este să le urmărim și să încercăm să le înțelegem. În acest sens, ele amintesc în mod ciudat de atomi și de stele, lucruri din lumea aceasta, care de asemenea sunt supuse unor legi pe care nu le putem controla... doar că legile acelea există în afara capetelor noastre.

Acest aspect dual al numerelor – în parte cerești, în parte pământești – este, poate, trăsătura lor cea mai paradoxală și trăsătura care le face atât de utile. Este ceea ce a avut în minte fizicianul Eugene Wigner atunci când a scris despre „inexplicabila eficiență a matematicii în științele naturale”.⁽³⁾

În cazul în care nu este clar ce înțeleg eu prin viața numerelor și comportamentul lor incontrollabil, să ne întoarcem la Hotelul Brațe Îmblânite. Să presupunem că înainte ca Humphrey să transmită comanda pinguinilor, el primește brusc un apel pe o altă linie de la o cameră ocupată de același număr de pinguini, care toți vor de asemenea pește. După ce a primit ambele apeluri, ce va striga Humphrey la bucătărie? Dacă nu a învățat nimic, poate striga „pește” pentru fiecare pinguin în parte. Sau, folosind numerele, i-ar putea spune bucătarului că are nevoie de șase porții de pește pentru prima cameră și de încă șase pentru cea de-a doua cameră. Dar ce are el cu adevărat nevoie este un concept nou: adunarea. Odată ce-l stăpânește, va spune cu mândrie că are nevoie de șase plus șase (sau, dacă e un lăudăros, douăsprezece) porții de pește.

Aici, procesul creativ coincide cu cel care ne-a oferit inițial numerele. La fel cum numerele sunt o scurtătură pentru socotitul cu unități, adunarea este o scurtătură pentru socotitul cu orice cantitate. Așa se dezvoltă matematica. Abstracțiunea corectă duce la o nouă perspectivă și la o nouă putere.

În scurt timp, până și Humphrey și-ar putea da seama că poate continua să numere la nesfârșit.

Dar, în pofida acestei viziuni infinite, creativitatea noastră este întotdeauna supusă unor constrângeri. Putem decide ce înțelegem prin lucruri precum 6 și +, dar, odată ce am făcut-o, rezultatele unor expresii precum $6 + 6$ nu mai depind de noi. Logica nu ne lasă nicio opțiune. În acest sens, matematica implică atât invenție, *cât și* descoperire: inventăm conceptele, dar descoperim consecințele lor. Așa cum vom vedea în capitolele următoare, în matematică libertatea noastră constă în întrebările pe care le punem – și în modul cum le studiem –, dar nu în răspunsurile care ne așteaptă.

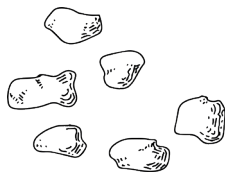
2. GRUPURI DE PIETRE

La fel ca orice altceva, aritmetica are o latură serioasă și o latură ludică.

Latura serioasă este aceea pe care am învățat-o cu toții în școală: cum să lucrăm cu coloane de numere, să le adunăm, să le scădem, să le prelucrăm cu softul pentru analiza datelor tabelate în vederea declarațiilor de venit și a rapoartelor de sfârșit de an. Latura aritmetică este importantă, practică și – pentru mulți oameni – lipsită de bucurie.

Latura ludică a aritmeticii⁽⁴⁾ e mult mai puțin familiară, decât doar dacă aveți o pregătire în metodele matematicii avansate. Dar ea nu presupune nimic inerent avansat. E la fel de naturală ca și curiozitatea unui copil.⁽⁵⁾

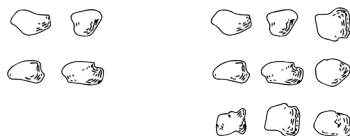
În cartea sa *A Mathematician's Lament*, Paul Lockhart pledează pentru o abordare în care numerele sunt tratate mai concret decât în mod obișnuit: el ne cere să ni le imaginăm ca pe niște grupuri de pietre. De exemplu, 6 corespunde unui grup de pietre precum acesta:



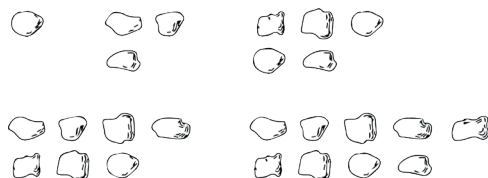
Probabil, nu vedeți nimic ieșit din comun aici, și aveți dreptate – dacă nu impunem condiții suplimentare numerelor, toate arată cam la fel. Șansa noastră de a fi creativi constă în ceea ce le cerem.

De exemplu, să ne concentrăm asupra unor grupuri care conțin între 1 și 10 pietre și să ne întrebăm care dintre

aceste grupuri pot fi rearanjate în formă de pătrat. Numai două dintre ele pot fi aranjate astfel: grupul cu 4 și grupul cu 9. Iar aceasta fiindcă $4 = 2 \times 2$ și $9 = 3 \times 3$; obținem aceste numere ridicând la pătrat alte numere (în fapt formând un pătrat).



O problemă mai puțin restrictivă este să identificăm grupurile de pietre care pot fi aranjate riguros într-un dreptunghi cu exact două linii egale. Aceasta este posibil dacă sunt 2, 4, 6, 8 sau 10 pietre; numărul trebuie să fie par. Dacă încercăm să așezăm oricare dintre celelalte numere de la 1 la 10 – numerele impare – pe două rânduri, întotdeauna unul va rămâne pe dinafară.



Dar numerele acestea inadaptabile mai au totuși o șansă. Dacă adunăm două dintre ele, protuberanțele se completează reciproc și suma lor este pară; $\text{impar} + \text{impar} = \text{par}$.



Dacă relaxăm și mai mult regulile pentru a admite numere mai mari decât 10 și a permite ca forma drept-

unghiulară să aibă mai mult de două rânduri de pietre, unele numere impare manifestă un talent pentru alcătuirea acestor dreptunghiuri mai mari. De exemplu, numărul 15 poate forma un dreptunghi 3×5 :



Prin urmare 15, deși incontestabil impar, are cel puțin consolarea că este un număr compus – e compus din trei rânduri a câte cinci pietre fiecare. În mod similar, oricare alt produs din tabla înmulțirii furnizează propriul său grup dreptunghiular de pietre.

Unele numere însă, ca de exemplu 2, 3, 5 și 7, sunt lipsite de orice speranță. Niciunul dintre ele nu poate forma niciun fel de dreptunghi, altul decât un simplu șir de pietre (un singur rând). Numerele acestea ciudat de inflexibile sunt faimoasele numere prime.

Vedem, așadar, că numerele au ciudățenii structurale care le conferă personalități. Dar, pentru a vedea întreaga gamă a comportamentului lor, trebuie să depășim nivelul numerelor individuale și să urmărim ce se întâmplă atunci când ele interacționează.

De exemplu, în loc să adunăm doar două numere impare, să presupunem că adunăm toate numerele impare consecutive, începând cu 1:

$$1 + 3 = 4$$

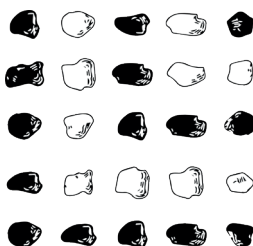
$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

În mod remarcabil, sumele de mai sus se dovedesc a fi întotdeauna pătrate perfecte. (Am văzut 4 și 9 în formele pătrate discutate anterior, iar $16 = 4 \times 4$ și $25 = 5 \times 5$.) O verificare rapidă arată că regula aceasta continuă să funcționeze pentru numere impare din ce în ce mai mari; s-ar părea că ea rămâne valabilă până la infinit. Dar ce legătură poate exista între numerele impare, cu apendicele lor dizgrațioase, și numerele cu o simetrie clasică ce formează pătrate? Aranjând pietrele în mod corect, putem face ca această legătură surprinzătoare să fie evidentă – semnul distinctiv al unei demonstrații elegante.⁽⁶⁾

Esențialul este să observăm că numerele impare pot alcătui structuri în formă de L, în care excrescențele lor sunt izgonite în colț. Iar dacă stivuiți două forme de L succesive, obțineți un pătrat!



Stilul acesta de gândire apare într-o altă carte recentă, deși din motive literare complet diferite. În fermecătorul roman al lui Yoko Ogawa, *The Housekeeper and the Professor* [*Menajera și profesorul*], o tânără femeie isteață, dar fără educație, cu un fiu în vârstă de zece ani, este angajată pentru a avea grijă de un matematician vârstnic care a suferit o leziune traumatică a creierului în urma căreia a rămas cu o memorie pe termen scurt de numai optzeci de minute.